சார்பினப் பகுப்பாய்வு

பெ. வடிவேல்

தமிழ்நாடு மாநில உயர்கல்வி மன்றம்
காமராஜர் சாலை, சென்னை-600 005.

சார்பினப் பகுப்பாய்வு

பெ. வடிவேல்
இணைப் பேராசிரியர்
கணிதத்துறை
மன்னர் சரபோசி அரசுக் கல்லூரி (தன்னாட்சி)
தஞ்சாவூர் - 613 005.

தமிழ்நாடு மாநில உயர்கல்வி மன்றம்
சென்னை - 600 005.

முதற் பதிப்பு : 2011

பதிப்புரிமை : தமிழ்நாடு மாநில உயர்கல்வி மன்றம்
சென்னை – 600 005

நூலின் பெயர் : சார்பினைப் பகுப்பாய்வு

நூலாசிரியர் : திரு. பெ.வடிவேல்,
இணைப்பேராசிரியர்,
கணிதத்துறை
மன்னர் சரபோசி அரசுக் கல்லூரி (தன்னாட்சி),
தஞ்சாவூர் – 613 005.

மறு ஆய்வு செய்தவர் : முனைவர் இ. தண்டபாணி,
பேராசிரியர்,
இராமானுஜம் கணிதவியல் மேம்பாட்டு நிறுவனம்,
சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்,
சென்னை 600 005.

தமிழ் திருத்தம் செய்தவர் : முனைவர் பி. இராஜேந்திரன்,
இணைப் பேராசிரியர்,
கணிதவியல் துறை,
மாநிலக் கல்லூரி,
சென்னை 600 005.

DR. T.P.M. LIBRARY * MADURAI KAMARAJ UNIVERSITY *
299099

விலை : ரூ.32.00

அச்சிட்டோர் : பாவை பிரிண்டர்ஸ் (பி) லிட்.,
142, ஜானி ஜான் கான் சாலை,
இராயப்பேட்டை,
சென்னை – 600 014.
தொ.பே.: 28482441, 28482973

உள்ளடக்கம்

முகவுரை

பகுதி ஒன்று – இயற்கணித அமைப்பு 3

1. கணம் மற்றும் சார்புகள் 3
2. பிரிவினை மற்றும் சமமான தொடர்பு 7
3. பகுதியாக்கப்பட்ட வரிசைக் கணங்கள் மற்றம் பின்னல்கள் 8
4. குலம், வளையம், புலம் 10
5. நேரியல் வெளிகள் 12
6. நேரியல் உருமாற்றம் 15
7. அறமம் 16

பகுதி இரண்டு – பானக் வெளிகள் 18

8. வரையறை மட்டும் எடுத்துக்காட்டுகள் 18
9. தொடர்ச்சியான நேரியல் உருமாற்றங்கள் 23
10. ஹான் பானக் தேற்றம் 27
11. திறந்தச் சார்பிடல் தேற்றம் 32
12. செயலியின் இணைச் செயலி 37

பகுதி மூன்று – ஹில்பர்ட் வெளிகள் 42

13. வரையறை மற்றும் சில தன்மைகள் 42
14. செங்குத்து நிரப்பிகள் 48
15. அலகு செங்குத்து கணம் 52
16. இணையிய வெளி 59
17. இணைபு மற்றும் தன்இணைப்புச் செயலி 61
18. இயல் மற்றும் அலகுநிலைச் செயலி 67
19. வீழல் 71

பகுதி நான்கு – முடிவுறு பரிமாண நிறமாலைக் கோட்பாடு 77

20. அணிகள் 79
21. அணிக்கோவை மற்றும் செயலியின் நிறமாலை 84
22. நிறமாலைத் தேற்றம் 88

பகுதி ஐந்து – பானக் அறமம் 92

23. வரையறை மற்றும் சில எடுத்துக்காட்டுகள் 92
24. ஒழுங்கான மற்றும் அருநிலை உறுப்புகள் 93
25. சுழியின் திணைய வகுப்பான் 95
26. நிறமாலை 96
27. நிறமாலை ஆரம் 100
28. அறமத்தின் படிமூலம் மற்றும் அரை எளிய அறமம் 102

பகுதி ஆறு – பரிமாற்றுப் பானக் அறமம் 107

29. ஜெல்பாண்ட் சார்பிடல் 107
30. $r(x) = \lim \| x_n \|^{1/n}$ என்ற வாய்பாட்டின் பயன்பாடு 112
31. பானக் அறமங்களில் உட்சுழற்சி 114
32. ஜெல்பாண்ட் நியூமார்க் தேற்றம் 116

மேற்கோள் நூல்கள் 118
குறியீடுகள் 119
கலைச்சொற்கள் 121

பகுதி - 1

இயற்கணித அமைப்பு
(Algebraic System)

சில நேரங்களில் கணிதம் என்பது கணம் (set) மற்றும் சார்புகளைப் பற்றி படிப்பதே என்று கூறுவதுண்டு. மிகவும் சுருக்கமாகக் கூறும்போது இது சரியாகத் தோன்றினாலும், நாம் நினைப்பது போல நூறு சதவீதம் சரியாக இருக்க வேண்டிய அவசியம் இல்லை.

கணம், மற்றும் சார்புகளைப் பற்றிய படிப்புகள் இரு வழிகளில் செல்கிறது. ஒன்று, தர்க்கவியல், (logic) தத்துவம் (Philosophy) மற்றும் அடிப்படை கணிதங்களைப் படிக்கும் வழியாகும். மற்றொன்று கணிதத்தின் உயர் மட்டங்களில் அதாவது தூய கணிதவியலி (Pure mathematics)-ல் அனைத்து மட்டங்களிலும் ஒன்றறக் கலந்துள்ளது. நாம் பிற்பகுதியைத்தான் தொடரப்போகிறோம் என்பதைச் சொல்லத் தேவையில்லை.

படிப்பவர்கள் இந்தப் பகுதியைத் தொடரும் போது, தாம் நினைத்த அளவிற்குக் கணம் மற்றும் சார்பு ஆகியவை எளிமையானவை அல்ல என்பது தெரியவரும்.

1. கணம் மற்றும் சார்புகள்

நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட உருவங்கள் (Objects) அல்லது உருப்படி (Entity) களின் தொகுப்பு கணம் எனப்படும். மெய்யெண்களில், நேர்ம இரட்டை எண்களின் கணம், விகிதமுறு எண்களின் கணம் மற்றும் மெய்புனையெண் தளத்தில், ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து ஒரு அலகு உள்ள புள்ளிகளின் கணம் போன்றவை கணத்திற்கு எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

ஒரு கணம் வெற்றுக் கணமாகவோ அல்லது ஏதாவது ஒரு நேர்ம முழு எண் n- உறுப்புகளைக் கொண்டவையாகவோ இருக்குமேயானால் அது, முடிவுறு கணம் (finite set) எனப்படும். அவ்வாறில்லையெனில் அது முடிவுறாக்கணம் (infinite set) எனப்படும். பெரும்பாலும் கணங்களைப் பெரிய எழுத்துக்களிலும் (Capital letters) அதில் உள்ள உறுப்புகளைச் சிறிய எழுத்துக்களிலும் குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

A என்ற கணத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் B- ல் இருக்குமானால், A என்பது B- ன் உட்கணம் (Subset) எனப்படும். இதனை $A \subseteq B$ எனக்குறிப்பிடலாம். A,B என்ற இரு கணங்கள் $A \subseteq B$, $B \subseteq A$ என இருக்குமானால் A=B எனப்படும். A என்பது B- க்கு உட்கணமாகவும் B-க்குச் சமமில்லாமலும் இருக்குமானால் A என்பது B- ன் முறையான உட்கணம் (Proper sub set) ஆகும்.

கணங்களின் மீது, இரண்டு கணங்களின் சேர்ப்புக் கணம் (Union of two sets) வெட்டுக்கணம் (intersection) மற்றும் நிரப்பிக்கணம் (Complement set) என மூன்று முக்கிய **அறமச்செயல்கள்** (Algebraic operation) வரையறை செய்யப்படுகின்றன. அதாவது A,B என்ற கணங்களின் சேர்ப்புக் கணம்

$A \cup B = \{x : x \in A$ அல்லது $x \in B\}$

வெட்டுக்கணம் $A \cap B = \{x : x \in A$ மற்றும் $x \in B\}$ மற்றும்

A-ன் நிரப்பிக் கணம் $A' = \{x : x \notin A\}$ என வரையறை செய்யப்படும்.

கணங்களின் சேர்ப்புக் கணம்

(1) $A \cup B = B \cup A$ (பரிமாற்று விதி)

(2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (இயைபு விதி)

(3) $A \cup A = A$, $A \cup U = U$ மற்றும் $A \cup \phi = A$

என்ற தன்மைகளையுடையது. இங்கு U என்பது முழுநிறை கணம் (Universal set). இதே போல வெட்டுக்கணமும்,

(1) $A \cap B = B \cap A$ (பரிமாற்று விதி)

(2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (இயைபு விதி)

(3) $A \cap A = A$, $A \cap U = A$ மற்றும் $A \cap \phi = \phi$

என்ற தன்மைகளையுடையதாகும். சேர்ப்புக் கணம், வெட்டுக் கணம் இணைந்து

(1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ என்ற பங்கீட்டு விதிகள் (Distributive laws) நிறைவு செய்யும்.

மேலும், A-ன் நிரப்பிக் கணம் கீழ்கண்ட தன்மைகளைப் பெற்றிருக்கும்

(1) $(A')' = A$, $U' = \phi$, $\phi' = U$

(2) $A \cup A' = U$, $A \cap A' = \phi$

(3) $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$

(4) $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$

U என்பது வெற்றற்ற முழு நிறைகணம், $\mathcal{A}$- என்பது U-ன் உட்கணங்களின் வகுப்பு (Class) ஒரு **பூலியன் அறமம்** (Boolean algebra) ஆக அமைய

$(1)\, A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

$(2)\, A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

$(3)\, A \in \mathcal{A} \Rightarrow A' \in \mathcal{A}$ என்ற கட்டுப்பாடுகளை கொண்டிருக்கும். இவற்றிலிருந்து $\mathcal{A} = \{\phi, U\}$ மற்றும் U-ன் அனைத்து உட்கணங்களையும் கொண்ட $\mathcal{A}$-யும் பூலியன் அறமங்கள் என்பது தெளிவாகிறது.

சார்பு என்பது மூன்று உருவங்களை உள்ளடக்கியதாகும். அதாவது இரண்டு வெற்றற்ற கணம் X, Y மற்றும் அவற்றிற்கிடையே X-ல் உள்ள ஒவ்வொரு x-க்கும் Y-ல் ஒரே ஒரு உறுப்பு y-ஐ தொடர்பு படுத்தும் f என்ற விதி என்பனவாகும். இந்த விதியானது $f(x) = y$ ஆகும். இங்கு y என்பது f-ஐப் பொறுத்து x-ன் நிழல் (Image) ஆகும். இந்தச் சார்பு $f: X \to Y$ எனக் குறிப்பிடப்படும். இந்தச் சார்பினை, சார்பிடல் (Mapping), நேரியல் உருமாற்றம் (Linear transformation), செயலி (Operator) எனவும் இடத்திற்கேற்ப பயன்படுத்தலாம். இங்கு X-என்பது f-ன் அரங்கம் (Domain) மற்றும் f(X) என்பது f-ன் வீச்சு (Range) என்றழைக்கப்படும்.

ஒரு சார்பின் வீச்சில் ஒரே ஒரு உறுப்பு மட்டுமே இருக்குமானால், அந்தச் சார்பு மாறிலிச் சார்பு (Constant function) எனப்படும். சார்பு f-ன் வீச்சு Y-க்குச் சமமாக இருக்குமானால் அந்தச் சார்பு மேல் சார்பு (on to function) எனப்படும். அவ்வாறில்லையெனில், அச்சார்பு உள் சார்பு (in to function) அல்லது சாதாரணமாக சார்பு என அழைக்கப்படும். சில நேரங்களில், நமது விவாதங்களுக்கு உட்படுத்தப்படும் கணங்கள் வெளிப்படையாகத் தெரியும் போது, $f: X \to Y$ என குறியீடு வாயிலாக எழுத வேண்டிய அவசியமில்லை. அதற்குப் பதிலாக $x \to y$ என பயன்படுத்தினாலே போதுமானதாகும். எடுத்துக்காட்டாக $y = x^3$ என்ற சார்பை $x \to y$ அல்லது $x \to x^3$ எனப் பயன்படுத்தலாம்.

g-ன் அரங்கத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு x-க்கும் $g(x)=f(x)$ என்றும், f-ன் அரங்கம், g-ன் அரங்கை உள்ளடக்கியிருக்குமானால், f என்ற சார்பு, சார்பு g-ன் நீட்டிப்பு (Extension) (அல்லது சார்பு g, சார்பு f-ன் கட்டுப்பாடு (Restriction) அல்லது சுருக்கம்) எனப்படும். சார்பின் வீச்சு மெய்யெண்களைக் கொண்டிருக்குமானால் அச்சார்பு மெய்ச்சார்பு (Real function) எனப்படும். இதேபோல, சார்பின் வீச்சு மெய்புனையெண்களைக் கொண்டிருக்குமானால், அச்சார்பு மெய்புனையெண்சார்பு எனப்படும். ஒவ்வொரு மெய்யெண்சார்பும் மெய்புனையெண் சார்பு என்பது மிகவும் வெளிப்படையானதே. இந்த நூல் முழுவதும், மெய்யெண்சார்பு, மெய்புனையெண் சார்புகளைப் பற்றியே விவாதிக்கப்படுகின்றது.

பொதுவாக, மெய்யெண் சார்பு, மெய்புனையெண் சார்புகளைச் சார்புகள் எனவும், மற்ற சார்புகளை, சார்பிடல் (Mapping) எனவும் பயன்படுத்தப்படுகின்றது.

வெவ்வேறு உறுப்புகளுக்கு வெவ்வேறு நிழல் உறுப்புகள் இருக்குமானால், அந்தச் சார்பு ஒன்றுக்கொன்றான (One to one) சார்பு எனப்படும். $f : X \to Y$ என்ற சார்பு ஒன்றுக்கொன்றான மேல் சார்பு எனில், $f^{-1}: Y \to X$ என்ற f-ன் நேர்மாற்றுச்சார்பு (Inverse function) $f^{-1}(y) = x$ என வரையறை செய்யலாம். எடுத்துக்காட்டாக $y = e^x$ என்ற சார்பின் நேர்மாற்றுச் சார்பு $x = \log y$ ஆகும்.

f-என்பது X மற்றும் Y-க்கிடையே ஒன்றுக்கொன்றான மேல் சார்பு எனில், X-ல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் Y-ல் ஒரு உறுப்பும், Y-ல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் X-ல் ஒரு உறுப்பும் தொடர்பு இருக்கும். இந்தச் சார்பினை ஒன்றுக்கொன்றான இயைபுச் சார்பு (One to one correspondence) என அழைக்கலாம். இதே போல f^{-1}-என்ற சார்பையும் ஒன்றுக்கொன்றான இயைபுச் சார்பு என அழைக்கலாம்.

$f : X \to Y$ என்ற சார்பு கீழ்க்கண்டவாறு இரண்டு கணச் சார்பிடல் (Set mapping) களை உருவாக்கத்தூண்டுகிறது. அதாவது A என்பது X-ன் உட்கணம் எனில், அதன் நிழல் $f(A)=\{f(x):x\in A\}$ என்பது, Y-ன் உட்கணமாகும். இந்தச் சார்பு ஒரு X–ன் உட்கணத்தை Y-ன் உட்கணமாக மாற்றுகிறது. இதேபோல, B என்பது Y-ன் உட்கணமெனில், f-ன் நேர்மாற்றுச் சார்பு f^{-1}, உட்கணம் B-யை $f^{-1}(B) = \{x : f(x)\in B\}$ என மாற்றுகிறது.

கணசார்பிடலானது கண உள்ளடக்கல் (Set inclusion) மற்றும் கணத்தின் மீது உள்ள செயலிகள் பொறுத்து எவ்வாறு செயல்படுகிறது என்பதை தெரிந்து கொள்வது மிகவும் தேவையான ஒன்றாகும். முதல் கண சார்பிடலுக்கான முக்கிய தன்மைகளாவன.

(1) $f(\phi) = \phi, \quad f(X) \subseteq Y$
(2) $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$
(3) $f(\cup A_i) = \cup f(A_i)$
(4) $f(\cap A_i) \subseteq \cap f(A_i)$

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அனைத்துத் தன்மைகளையும் எளிதில் நிறுவலாம். இந்த வாக்கியங்களில் உள்ள ஒழுங்கற்றத் தன்மையை வாசகர்கள் எளிதில் உணரலாம். அதாவது, வெட்டுக்கணங்களின் நிழல் என்பது நிழல்களின் வெட்டுக் கணங்களுக்குச் சமமாக இருக்காது. ஏனெனில் இரண்டு இணைப்பில்லாக் கணங்களின் நிழல்கள் இணைப்பில்லாத கணங்களாக இருக்காது.

இரண்டாவது கணச்சார்பிடல் முதல் சார்பிடலினை விட நன்கு செயல்படுகிறது. இதன் தன்மைகளாவன.

(1) $f^{-1}(\phi) = \phi$, $f^{-1}(Y) = X$
(2) $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$
(3) $f^{-1}(\cup B_i) = \cup f^{-1}(B_i)$
(4) $f^{-1}(\cap B_i) = \cap f^{-1}(B_i)$
(5) $f^{-1}(B') = [f^{-1}(B)]'$.

இந்தத் தன்மைகளை எளிதில் நிறுவலாம். நாம் இப்போது மேலும் ஒரு கொள்கையைப் பற்றிக் காண்போம். அதாவது இரண்டு சார்புகளின் பெருக்கல் அல்லது இயைபு (Composition) பற்றி காணலாம். $y = x^2 + 1$ என்பது ஒரு சார்பு, மற்றும் $z = \sin y$ என்பது மற்றொரு சார்பு எனில் இதனை இணைத்து ஒரே சார்பாக $z = \sin(x^2+1)$ என எழுதலாம். இதனை கீழ்க்கண்டவாறு வரையறை செய்யலாம். $f : X \to Y$ மற்றும் $g : Y \to Z$ என்பன இரண்டு சார்புகள் எனில் இதன் பெருக்கல் $gf : X \to Z$ என்ற சார்பை $(gf)\ x = g\ (f(x))$ என வரையறுக்கலாம். இதில் பயன்படுத்தப்படும் சார்புகள் ஏதாவது இரண்டு சார்புகள். முதல் சார்பின் வீச்சும் இரண்டாவது சார்பின் அரங்கமும் சமமாக இருந்தால் மட்டுமே இந்தப் பெருக்கல் வரையறை செய்யலாம். பொதுவாக, முதல் சார்பின் வீச்சு இரண்டாவது சார்பினுடைய அரங்கத்தின் உட்கணமாக இருந்தாலே இரண்டு சார்புகளின் பெருக்கல் என்பது பொருளுடையதாகும். இங்கு f-என்பது முதல் சார்பு, g என்பது இரண்டாவது சார்பு எனில் இதன் பெருக்கல் gf ஆகும்.

X_1, X_2 என்பன ஏதாவது இரண்டு வெற்றற்ற கணங்கள் எனில், இவற்றின் பெருக்கல் என்பது $X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\}$ என வரையறை செய்யப்படும். X_1-ல் p உறுப்புகளும், X_2-ல் q உறுப்புகளும் இருக்குமாயின் $X_1 \times X_2$-ல் pq-உறுப்புகள் இருக்கும். இந்த வரையறையை n-கணங்களுக்கு நீட்டிக்கலாம். இங்கு n என்பது ஏதாவது ஒரு நேர்ம முழு எண், $X_1, X_2, \ldots .X_n$ என்பது n-வெற்றற்ற கணங்கள் எனில், அவற்றின் பெருக்கல் $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots x_n) : x_i \in X_i\ i = 1, 2..n\}$ ஆகும். $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = X$ எனில் $X_1 \times X_2 \times \ldots X_n$- ஐ X^n என எழுதலாம். இதேபோல $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = R$ அல்லது C எனும் போது $X_1, \times X_2 \times \ldots \times X_n$ என்பது R^n அல்லது C^n ஆகும். R^n, C^n என்பது யூக்ளிடீன் வெளி (Euclidean space) அல்லது அலகுநிலை n- வெளி (Unitary n-space) எனப்படும்.

2. பிரிவினை மற்றும் சமமான தொடர்பு
Partition And Equivalence Relation

ஒன்றுக்கொன்று இணைப்பில்லா X-ன் உட்கணங்கள் $\{X_i\}$, $\cup X_i = X$ எனும்போது X-ன் பிரிவினை எனப்படும். X_i என்பன பிரிவினைக் கணங்கள் (Partition sets) எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, R-என்ற மெய்யெண் கணத்தை விகிதமுறு எண்கள் கணம், விகிதமுறா எண்கள் கணம் என பிரிவினையாக்கலாம். X என்ற கணத்தில் R என்ற இருமத் தொடர்பு (binary relation) என்பது (x, y) அல்லது xRy என வரையறை செய்யலாம். அதாவது x ஆனது, y-ஐ R-இனால் தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளது. இதனைச் சாதாரணமாகத் தொடர்பு எனக் குறிப்பிடலாம். இந்தத் தொடர்பானது கீழ்க்கண்ட

கட்டுப்பாடுகளை நிறைவு செய்யுமானால் சமானத் தொடர்பு (Equivalence relation) எனப்படும்.

(1) ஒவ்வொரு x-க்கும் xRx (தற்சுட்டு) (Reflexivity)
(2) $xRy \Rightarrow yRx$ (சமச்சீர்மை) (Smmetry)
(3) $xRy, yRz \Rightarrow xRz$ (கடப்புத் தன்மை) (Transitivity)

x என்பது X-ல் ஓர் உறுப்பு எனில், X-ன் உட்கணம் $[x] = \{y : yRx\}$ என்பது x-ன் சமான கணம் (Equivalence set) எனப்படும். அனைத்துச் சமான கணங்கள் X-ன் பிரிவினையை உருவாக்கும். ஏதாவது இரண்டு சமான கணங்கள் இணைப்பில்லாமலோ அல்லது சமமாகவோ இருக்கும்.

X,Y என்ற இரண்டு கணங்களிடையே ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடைய மேல் சார்பு இருக்குமெனில், X என்பது Y-க்கு எண்ணளவில் சமமானவை (Numerically equivalent) எனப்படும். ஏதாவது ஒரு முடிவுறு கணம் N-உடன் எண்ணளவில் சமமாக இருக்குமெனில், அக்கணம், எண்ணத்தக்க முடிவுறாக் (Countably infinite) கணம் எனப்படும். A என்ற கணம் வெற்றில்லா முடிவுறு கணம் அல்லது எண்ணதக்க முடிவுறா கணம் ஆக இருக்குமானால் அது **எண்ணத்தக்க** (Countable) கணம் எனப்படும். அவ்வாறில்லையெனில் அந்தக் கணம் **எண்ணத்தகா** (Uncountable) கணம் எனப்படும்.

3. பகுதியாக்கப்பட்ட வரிசைக் கணங்கள் மற்றும் பின்னல்கள்
Partially ordered sets and lattices

கணத்தில் இரண்டுவகையான தொடர்பு (Relation)கள் இருக்கின்றன. வரிசைத்தொடர்பு (Order relation), சமான தொடர்பு (Equivalence relation) என்பனவாகும். சமான தொடர்பு பற்றி முந்தைய பகுதியில் சுருக்கமாகப் பார்த்தோம். இப்போது வரிசைத்தொடர்புப் பற்றி காணலாம்.

P என்பது வெற்றில்லாக் கணம். P-ல் உள்ள **பகுதி வரிசைத்தொடர்பு** (Partial order relation) ஆனது கீழ்க்கண்ட கட்டுப்பாடுகளை நிறைவு செய்யும், $\leq$ குறியிட்ட, ஒரு தொடர்பாகும்.

(1) ஒவ்வொரு x-க்கும் $x \leq x$, (தற்சுட்டு)
(2) $x \leq x$ மற்றும் $y \leq x \Rightarrow x=y$ (எதிர்சமச்சீர்மை)
(3) $x \leq y$ மற்றும் $y \leq z$ எனில் $x \leq z$ (கடப்புத்தன்மை)

ஒரு பகுதி வரிசை தொடர்பு வரையறை செய்யப்பட்ட ஒரு கணம் **பகுதி வரிசைக் கணம்** (Partially ordered set) எனப்படும். பகுதிவரிசைக் கணத்தின் ஒவ்வொரு உட்கணமும் ஒரு பகுதி வரிசைக் கணம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1

P என்பது அனைத்து நேர்ம முழு எண்களின் கணம். இதில் $m \leq n$ என்பது n-ஐ m என்ற எண் வகுக்கும் எனக் குறிக்கும். இந்தத் தொடர்பைப் பொறுத்து P- ஒரு பகுதி வரிசைக் கணம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2

P என்பது முழு நிறைவுக் கணம் U-ன் அனைத்து உட்கணங்களின் கணம் எனில், இதில் A என்பது B-ன் உட்கணம் என்பதை $A \leq B$ என்ற குறியீட்டால் குறிப்பிடுவோம் எனில், $\leq$-ஐப் பொறுத்து P-என்பது ஒரு பகுதி வரிசைக் கணமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3

P என்பது X என்ற வெற்றற்ற கணத்தின் மீது வரையறை செய்யப்படும் அனைத்து மெய்யெண்சார்புகளின் கணம். இதில், X-ல் உள்ள ஒவ்வொரு x-க்கும் $f(x) \leq g(x)$ என இருக்குமாயின் $f \leq g$ எனக் குறிப்பிடுவோம். P என்பது $\leq$ என்ற குறியீட்டைப் பொறுத்து ஒரு பகுதி வரிசைக் கணமாகும்.

ஒரு பகுதியாக்கப்பட்ட வரிசைக் கணத்தின் உள்ள இரண்டு உறுப்புகள் ஒப்பிடக்கூடியவை (Comparable) யாக இருக்கவேண்டுமானால் ஓர் உறுப்பு மற்றொரு உறுப்புக்குச் சமமாகவோ அல்லது குறைவாகவோ இருக்கும். சில பகுதியாக்கப்பட்ட வரிசைக் கணங்களில் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள நான்காவது தன்மையையும் கொண்டிருக்கலாம்.

(4) P–ல் உள்ள எந்த இரண்டு உறுப்புகளும் ஒப்பிடக் கூடியவை

P என்ற பகுதியாக்கப்பட்ட வரிசைக் கணம் (4) –ஆவது தன்மையையும் கொண்டிருக்குமானால் அது மொத்த வரிசைப்படுத்தப்பட்ட கணம் (Totally ordered set) அல்லது நேரியல் வரிசைப்படுத்தப்பட்ட கணம் (Linearly ordered set) எனப்படும்.

A என்பது P-என்ற பகுதியாக்கப்பட்ட வரிசைக் கணத்தின் உட்கணம் என்க. A-ல் உள்ள ஒவ்வொரு a-க்கும் $x \leq a$ எனும் போது, $x \in P$ என்ற உறுப்பு A-ன் கீழ் எல்லை அல்லது கீழ்வரம்பு (Lower bound) எனப்படும். இந்தக் கீழ் எல்லைகளில் மிகப்பெரிய கீழ் எல்லை மீப்பெரு கீழ் எல்லை (Greatest lower bound) என்றழைக்கப்படும். இதேபோல, A-ல் உள்ள ஒவ்வொரு a-க்கும் $a \leq x$ எனும் போது $x \in P$ என்ற உறுப்பு A-ன் மேல்எல்லை அல்லது மேல்வரம்பு (Upper bound) எனப்படும். இந்த மேல் எல்லைகளில் மிகச்சிறிய மேல்எல்லை மீச்சிறு மேல்எல்லை (Least upper bound) என்றழைக்கப்படும்.

L-என்ற பகுதியாக்கப்பட்ட வரிசைக் கணத்தில், எந்த இரண்டு உறுப்புகளுக்கும், மீப்பெரு கீழ் எல்லை, மற்றும் மீச்சிறு மேல் எல்லை இருக்குமானால், L ஒரு **பின்னல்** (Lattice) எனப்படும். பின்னல் L-ல் x,y என்ற இரு உறுப்புகளின் மீப்பெரு கீழ் எல்லை $x \vee y$ எனவும் மீச்சிறு மேல் எல்லை $x \wedge y$ எனவும் குறிப்பிடப்படும். மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மூன்று எடுத்துக்காட்டுகளுமே பின்னல்கள் ஆகும்.

L என்பது ஒரு பின்னல் L_1 என்பது L-ன் உட்கணம். $x,y \in L_1$ எனில், $x \vee y$, $x \wedge y$ என்பதும் L_1-ல் இருக்குமானால் L_1 என்பது L-ன் உள்பின்னல் (Sub lattice) எனப்படும்.

ஒரு பின்னலின் ஒவ்வொரு உட்கணமும் மீப்பெரு கீழ் எல்லை மற்றும் மீச்சிறு மேல்எல்லை கொண்டிருக்குமானால், அந்தப் பின்னல் முழுப்பின்னல் (Complete lattice) எனப்படும்.

4. குலம், வளையம் மற்றும் புலம் (Groups, Ring, Field)

G- என்ற வெற்றில்லாக் கணத்தில் வரையறை செய்யப்படும் $*$ என்ற இருமச் செயலி (Binary operation) கீழ்க்கண்ட கட்டுப்பாடுகளை நிறைவு செய்யுமானால் அது $*$-ஐப் பொறுத்து ஒரு **குலம்** எனப்படும்.

(1) $a, b \in G \Rightarrow a * b \in G$
(2) $a, b, c \in G \Rightarrow a * (b * c) = (a * b) * c$
(3) G-ல் உள்ள ஒவ்வொரு x-க்கும், $x * e = e * x = x$ என்றவாறு உள்ள ஒரே ஒரு e,G-ல் இருக்கும். இந்த உறுப்பு e–முற்றொருமை உறுப்பு எனப்படும்.

(4) G-ல் உள்ள ஒவ்வொரு x-க்கும், அதற்குத் தகுந்தாற்போல் x^{-1} என்ற உறுப்பு, $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$ என்றவாறு, G-ல் இருக்கும்.

இந்தக் குலம், $a, b \in G \Rightarrow a * b = b * a$ என்ற கட்டுப்பாட்டை நிறைவு செய்யுமானால், அது பரிமாற்றுக் குலம் (Commutative group) அல்லது அபிலியன்குலம் (Abelian group) எனப்படும். அனைத்து மெய்யெண்களின் கணம், கூட்டலைப் பொறுத்து ஒரு குலம் ஆகும்.

R என்பது கூட்டலைப் பொறுத்து ஓர் அபிலியன் குலமாகவும் பெருக்கலைப் பொறுத்துக் கீழ்க்கண்ட கட்டுப்பாடுகளை நிறைவு செய்யுமானால் அது ஒரு **வளையம்** எனப்படும்.

(1) $x, y, z \in R \Rightarrow x (y z) = (x y) z$ (இயைபு விதி)
(2) $x, y, z \in R \Rightarrow x (y + z) = xy + xz, (x+y) z = xz + yz$ (பங்கீட்டு விதி)

அனைத்து இரட்டை எண்கள் (Even numbers) கூட்டல் மற்றும் பெருக்கலைப் பொறுத்து ஒரு வளையம் ஆகும்.

ஒரு வளையத்தில் $xy = yx$, $x, y \in R$ என்ற கட்டுப்பாடு நிறைவு பெறுமானால் அது பரிமாற்று வளையம் (Commutative ring) எனப்படும். ஒரு வளையத்தில் 1 என்ற பூச்சியமில்லா உறுப்பு $x1=1x = x$ என்றவாறு இருக்குமானால் அந்த வளையம் முற்றொருமை உள்ள வளையம் (Ring with unity) எனப்படும். இங்கு 1 என்பது வளையத்தின் முற்றொருமை உறுப்பு ஆகும். மேலும் R-ல் உள்ள x- என்ற உறுப்பிற்குத் தகுந்தாற்போல் y என்ற உறுப்பு $xy = yx = 1$ என்றவாறு R-ல் இருக்குமானால், y என்பது x-ன் எதிர்மாறு (Inverse) உறுப்பு எனப்படும். இதனை x^{-1} என குறிப்பிடப்படும். அதாவது $y = x^{-1}$. R-ல் உள்ள x என்ற உறுப்புக்கு எதிர்மாறு இருக்குமானால் அந்த உறுப்பு சீரான உறுப்பு (Regular) அல்லது ஒழுங்கான உறுப்பு எனப்படும். முற்றொருமை உறுப்பு உள்ள வளையம் R-ல் உள்ள அனைத்துப் பூச்சியமில்லா உறுப்புகளும் எதிர்மாறு உறுப்புகளைக் கொண்டிருக்குமானால் அந்த வளையம் **புலம்** (Field) எனப்படும்.

R-என்பது வளையம். R-ன் ஏதாவது ஒரு வெற்றற்ற உட்கணம் S-ஆனது R-ல் வரையறை செய்யப்படும் செயல்முறைகளைப் பொறுத்து ஒரு வளையமாக அமையுமானால் அது R-ன் உள் வளையம் (Sub Ring) எனப்படும்.

சிறப்பு உள் வளையங்கள் பற்றி நாம் இப்போது கவனம் செலுத்துவோம். R-ல் ஒரு சீர் வளையம் (Ideal) என்பது, ஒவ்வொரு $x \in R$-க்கும், $i \in I \Rightarrow ix \in I$, மற்றும் $xi \in I$ என்ற கட்டுபாட்டைப் நிறைவு செய்யும் உள்வளையம் I- ஆகும். I-என்பது R-ன் முறையான உட்கணமாக (Proper subset) இருக்குமானால், அது முறையான சீர் வளையம் எனப்படும். $\{0\}$, R-என்பன R-ன் அற்ப சீர்வளையம் (Trivial ideal) எனப்படும். எனவே ஒவ்வொரு பூச்சியமில்லா உறுப்புகளையுடைய வளையத்திற்கு குறைந்தது இரண்டு சீர்வளையங்கள் இருக்குமென்பது வெளிப்படையானதாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக அனைத்து முழு எண்களின் வளையத்திற்கு, இரட்டை எண்களின் கணம் ஒரு சீர்வளையம் ஆகும்.

வளையத்தின் கட்டமைப்பும் அதன் சீர்வளையமும் மிகவும் நெருங்கிய தொடர்புடைய தாகும். அதாவது, இதனை R-என்ற முற்றொருமை உறுப்புடைய பரிமாற்று வ்ளையம் புலமாக அமையத் தேவையான மற்றும் போதுமான கட்டுப்பாடு அது அற்பமற்ற சீர்வளையங்களைக் கொண்டிருக்காது என்பது விளக்குகிறது.

I-என்பது R-என்ற வளையத்தின் சீர் வளையம் என்க. R-ல் இரண்டு உறுப்புகளுக்கிடையே ஒரு தொடர்பினை கீழ்கண்டவாறு வரையறை செய்வோம். அதாவது R-ல் உள்ள x,y என்ற இரு உறுப்புகள் I-மடங்கில் ஒருங்கிசை (Congruent modulo I) வான உறுப்புகள் என, x.y என்பது I-ல் இருக்கும்போது, அழைக்கலாம்.

இதனை $x \equiv y \pmod I$ எனக் குறிப்பிடலாம். இந்தத் தொடர்பானது சமானத் தொடர்பு என்பதை எளிதில் நிறுவலாம். இந்த சமானத் தொடர்பைப் பயன்படுத்திச் சமான வகுப்புக் கணம் (Equivalence class set) வரையறை செய்யலாம். இதனை இங்கு இணைக் கணம் (Coset) எனக் குறிப்பிடப்படும். இவற்றிலிருந்து R-ல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் x-க்கும் அதன் இணைக் கணம் $[x] = x + I$ எனக் குறிப்பிடலாம்.

தேற்றம் 4.1

R-என்பது வளையம். I என்பது R-ன் சீர் வளையம் எனில் R/I என்பது அனைத்து இணைக் கணங்களின் கணம் ஆகும். இது

$$(x+I)+(y+I) = (x+y)+I,\ x, y \in R,$$
$$(x+I)(y+I) = xy+I,\ x, y \in R \text{ என்ற}$$

இரும செயலிகளைப் பொறுத்து ஒரு வளையம் என நிறுவலாம். இந்த வளையம் **ஈவு வளையம்** (Quotient Ring) எனப்படும். மேலும், R-பரிமாற்று வளையமாக இருக்கும் போது R/I -ம் பரிமாற்று வளையமாக இருக்கும்.

R, R' என்பன இரு வளையங்கள். R-லிருந்து R' -க்கு வரையறை செய்யப்படும் சார்பிடல் (Mapping) f ஆனது

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$f(xy) = f(x)\,f(y),\ x, y \in R.$$

என்ற கட்டுப்பாட்டை நிறைவு செய்யுமானால், அது **செயலொப்புமைச் சார்பு** (homomorphism) எனப்படும். இந்தச் செயலொப்புமைச் சார்பு ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடையதாக இருந்தால், அது **சமஒப்புமைச் சார்பு** (Isomorphism) எனப்படும்.

I என்பது R-ன் முறையான சீர்வளையம் என்க. இந்தச் சீர்வளையமானது வேறு எந்த முறையான சீர்வளையத்தின் உள் அடங்கியிருக்கவில்லையெனில் அது **பெருமச் சீர்வளையம்** (Maximal Ideal) எனப்படும். இந்தக் கருத்தைப் பயன்படுத்தி உடனடியாக கீழ்க்கண்ட தேற்றத்தைக் நிறுவலாம்.

தேற்றம் 4.2

R என்பது முற்றொருமை உறுப்பு உள்ள பரிமாற்று வளையம் என்க. சீர்வளையம் I-என்பது R-ல் பெருமச் சீர்வளையமாக அமையத் தேவையான மற்றும் போதுமான கட்டுப்பாடு R/I என்பது ஒரு புலம் ஆகும்.

5. நேரியல் வெளிகள் (Linear Spaces)

L-என்ற வெற்றற்ற திசையன்களின் கணம் கூட்டலைப் பொறுத்து அபிலியன் குலமாகவும், அளவன் பெருக்கலைப் பொறுத்து கீழ்க்கண்ட கட்டுப்பாடுகளையும் நிறைவு செய்யுமானால், அது நேரியல் வெளி அல்லது திசையவெளி எனப்படும்.

(1) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

(2) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

(3) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

(4) $1x = x$

இங்கு அளவன் (Scalar) என்பது மெய்யெண்கள் அல்லது மெய்புனையெண்களைக் குறிக்கும் என்பதை மீண்டும் நிறைவூட்ட விரும்புகிறேன். இதில் பயன்படுத்தப்படும் இரண்டு செயலிகளும் நேரியல் செயல்கள் (Linear operations) எனப்படும். ஒரு நேரியல் வெளி என்பது மெய் நேரியல் வெளி அல்லது மென்புனையெண் நேரியல் வெளி என அதில் பயன்படுத்தப்படும் அளவனைப் பொறுத்துக் குறிப்பிடப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 1

அனைத்து மெய்யெண்களின் கணம் R-என்பது வழக்கமானக் கூட்டல் மற்றும் பெருக்கலைப் பொறுத்து நேரியல் வெளி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2

$R^n = \{(x_1,x_2,....x_n) : x_i \in R, i = 1,2,3....n\}$என்பது, $x = (x_1,x_2,...x_n), y = (y_1,y_2,...y_n)$ எனில், $x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2,...x_n+y_n)$, $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2,....\alpha x_n)$ என்ற நேரியல் செயலிகளைப் பொறுத்து ஒரு திசைய வெளி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3

பூச்சியச் திசையனை மட்டும் கொண்ட கணம் $\{0\}$ என்பது ஒவ்வொரு α –வுக்கும் $\alpha 0 = 0$ என்ற அளவன் பெருக்கலுக்கு நேரியல் வெளி ஆகும். இந்த வெளி பூச்சிய வெளி எனப்படும்.

நேரியல் வெளி L-ன் வெற்றற்ற உட்கணம் M-ஆனது L-ல் உள்ள அதே நேரியல் செயலிகளைப் பொறுத்து ஒரு நேரியல் வெளி ஆக அமையுமானால் அது L-ன் நேரியல் உள்வெளி (Linear sub space) எனப்படும். இங்கு M என்பது L-ல் முறையான உட்கணம் எனில் M-என்பது L-ன் முறையான நேரியல் உள்வெளி ஆகும். $\{0\}$வெளி மற்று வெளி L என்பன முறையிலா நேரியல் உள்வெளிகள் (improper linear sub space) எனப்படும்.

தேற்றம் 5.1

M என்பது நேரியல் வெளி L-ன் நேரியல் உள்வெளி என்க. L-ல் உள்ள x-ன் இணைக்கணம் $x + M = \{x + m : m \in M\}$ என வரையறை செய்வோம். இந்த இணைக் கணங்களின் கணம் L/M என்பது $(x+M)+(y+M)=(x+y)+M$ மற்றும் $\alpha(x+M) = \alpha x + M$ என்ற நேரியல் செயல்களைப் பொறுத்து ஒரு நேரியல் வெளி ஆகும். (இது ஈவு வெளி எனப்படும்)

$S=\{x_1,x_2,....x_n\}$ என்பது L-ன் வெற்றற்ற முடிவுறு உட்கணம் எனில், $x=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+....+\alpha_nx_n$ என்பது $x_1,x_2....x_n$-ன் நேரியல் சேர்க்கை எனப்படும். S-ன் அனைத்து நேரியல் கலவை [S] என்பது L-ன் நேரியல் உள்வெளி என எளிதில் நிறுவலாம். இந்த உள்வெளியானது S-ஆல் உருவாக்கப்பட்டது (Spanned) எனப்படும். M,N என்பன L-ன் இரு நேரியல் உள் வெளிகள் எனில், அவற்றின் கூட்டல் $M+N=\{x+y : x\in M, y\in N\}$ என்பதும் L-ன் ஒரு நேரியல் உள்வெளி என எளிதில் நிறுவலாம். இங்கு M+N = L எனில், L-ல் உள்ள ஒவ்வொரு திசையன் z-ஐயும் z = x+y, $x\in M$, $y\in N$ என எழுதலாம். இந்தக் கூட்டல் z = x+y–ஐ ஒரே ஒரு வகையில் மட்டும் எழுத முடியுமானால், M+N என்ற கூட்டல் நேர்கூட்டல் (direct sum) எனப்படும். இதனை $L=M\oplus N$ எனக் குறிப்பிடப்படும்.

தேற்றம் 5.2

M,N என்பன L-ன் நேரியல் உள்வெளிகள், L = M+N என்ற கூட்டல் நேர்கூட்டலாக அமையத் தேவையான மற்றும் போதுமான கட்டுப்பாடு $M\cap N=\{0\}$ ஆகும்.

இந்தத் தேற்றத்திலிருந்து M,N என்ற உள்வெளிகள் பூச்சியத்தை மட்டும் பொதுவான உறுப்பாகக் கொண்டிருக்கும். பெரும்பாலும் இந்த இரண்டு உள்வெளிகள் இணைப்பில்லா வெளிகள் (disjoint spaces) எனக் குறிப்பிடலாம். ஆனால், இது கணக்கோட்பாட்டின் படி பார்ப்போமானால், L-ன் எந்த இரண்டு உள்வெளியானது எப்போதுமே, இணைப்பற்றதாக இருக்காது. இந்த நேர்கூட்டல் தன்மையை மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட உள்வெளிகளுக்கு நீட்டிக்கும் போது $L=M_1\oplus M_2\oplus....\oplus M_n, n>2$ என எழுதலாம். இங்கு L-ல் உள்ள ஒவ்வொரு x-ஐயும் $x=x_1+x_2+...+x_n, x_i\in M_i, i=1,2,....n$ என ஒரே ஒரு வழியில் எழுதலாம்.

L-என்பது நேரியல் வெளி. $S=\{x_1,x_2,....x_n\}$ என்பது L-ன் உட்கணம் எனில், $x_1,x_2...x_n$ என்ற திசையன்களுக்குத் தகுந்தாற்போல், அனைத்து $\alpha_1,\alpha_2...\alpha_n$ -ம் பூச்சியமில்லாமல், $\alpha_1x_1+\alpha_2\ x_2\ +......\alpha_n\ x_n\ =\ 0$ ஆகும் எனில், கணம் S-நேரியல் சார்புடைய கணம் (Lincary dependant set) எனப்படும். அவ்வாறில்லையெனில் S ஒரு நேரியல் சார்பற்ற கணம் எனப்படும். அதாவது $\alpha_1x_1+\alpha_2\ x_2\ +......\alpha_n\ x_n=0$ எனும்போது $\alpha_1=\alpha_2=......\alpha_n\ =0$ எனக் கிடைக்குமானால், S- என்ற கணம் நேரியல் சார்பற்ற கணம் ஆகும்.

நேரியல் சார்பற்ற கணம் S-ஐ உ ள்ளடக்கியிருக்கின்ற அனைத்து முறையான L-ன் உட்கணங்களும் நேரியல் சார்புள்ள கணங்களாக இருக்குமானால், S என்பது பெரும நேரியல் சார்பற்ற கணம் (Maximal linerly independent) எனப்படும்.

$S=\{x_1,x_2,...x_n\}$ என்ற நேரியல் சார்பற்ற கணம் L-ஐ உருவாக்குமானால், அதாவது L-ல் உள்ள ஒவ்வொரு x-ஐயும் $x_1,x_2...x_n$-ன் நேரியல் சேர்க்கையாக எழுதமுடியுமானால், கணம் S ஆனது அடிக்கணம் (Basis) எனப்படும். இந்த வரையறையிலிருந்து நேரியல் வெளி L-ன் உட்கணம் S என்பது அடிக்கணமாக அமையத் தேவையான மற்றும் போதுமான கட்டுப்பாடு S ஒரு பெரும நேரியல் சார்பற்றக் கணமாகும் என்பதை உணரலாம். இவற்றிலிருந்து கீழ்க்கண்ட தேற்றத்தை நிறுவலாம்.

தேற்றம் 5.3

S என்பது, L-என்ற நேரியல் வெளியில் நேரியல் சார்பற்ற கணம் எனில் அதற்கேற்றவாறு B என்ற அடிக்கணம் $S \subseteq B$ என இருக்கும்.

ஒரு நேரியல் சார்பற்ற கணம் என்பது வரையறைப்படி வெற்றற்ற கணம். மேலும் அது பூச்சிய உறுப்பை உள்ளடக்கியிருக்காது. எனவே $L=\{0\}$ என்ற நேரியல் வெளிக்கு நேரியல் சார்பற்ற கணம் இருக்காது. ஆனால் $L \neq \{0\}$ என்ற நேரியல் வெளிக்கு நேரியல் சார்பற்ற கணம் இருக்கும். இந்தக் கருத்தின் அடிப்படையில் கீழே உள்ள தேற்றத்தை நிறுவலாம்.

தேற்றம் 5.4

ஒவ்வொரு பூச்சியமில்லா நேரியல் வெளியும் அடிக்கணத்தைக் பெற்றிருக்கும்.

தேற்றம் 5.5

L-என்பது பூச்சியமில்லா நேரியல் வெளி மற்றும் B_1,B_2 என்பன அதன் அடிக்கணங்கள் எனில், B_1,B_2-ல் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கைச் சமமாக இருக்கும்.

ஒரு நேரியல் வெளியின் அடிக்கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அந்த நேரியல் வெளியின் **பரிமாணம்** (Dimension) எனப்படும். அந்த அடிக்கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை முடிவுறு எண்ணாக இருக்குமானால் முடிவுறு பரிமாண வெளி (Finite dimensional space) எனப்படும். அவ்வாறில்லையெனில் அது முடிவில்லா பரிமாண வெளி எனப்படும்.

6. நேரியல் உருமாற்றம் (Linear Transformation)

ஒரே அளவன் புலத்தைப் பொறுத்து L, L_1 என்பன நேரியல் வெளிகள் என்க. $T : L \rightarrow L_1$ என்ற சார்பிடல்

$$(1)\ T(x+y)=T(x)+T(y),\ x,y\in L$$

$$(2)\ T(\alpha x)=\alpha T(x),\ x\in L,\alpha\in F$$

அல்லது

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha T(x)+\beta T(y),\alpha,\beta\in F,x,y\in L$$

என இருக்குமானால் அது **நேரியல் உருமாற்றம்** எனப்படும்.

L, L_1 என்பன ஒரே அளவன் புலத்தைப் பொறுத்து நேரியல் வெளிகள். L-லிருந்து L_1-க்கு வரையறை செய்யப்படும் அனைத்து நேரியல் உருமாற்றங்களின் கணம்

$$(T_1+T_2)x=T_1(x)+T_2(x),x\in L$$

$$(\alpha T_1)(x)=\alpha T_1(x),\alpha\in F,x\in L$$

என்ற செயலிகளைப் பொறுத்து ஒரு நேரியல் வெளி ஆகும். இந்த நேரியல் வெளியில் $O(x)=0,x\in L$ என்பது பூச்சிய உருமாற்றம். மேலும் $I(x)=x,x\in L$ என்பது முற்றொருமை உருமாற்றமாகும்.

T என்ற நேரியல் உருமாற்றம் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடைய மேல் சார்பு எனில், அதற்குத் தகுந்தாற் போல் எதிர்மாறு நேரியல் உருமாற்றம் T^{-1} இருக்கும். இது $TT^{-1}=T^{-1}T=I$ என்ற தன்மையுடையதாகும். T என்ற நேரியல் உருமாற்றத்திற்கு எதிர்மாறு நேரியல் உருமாற்றம் இருக்குமெனில், அது அருநிலையற்ற (Non Singular) நேரியல் உருமாற்றம் எனப்படும். அவ்வாறில்லையெனில், T என்பது, அருநிலை (Singular) நேரியல் உருமாற்றம் எனப்படும்.

L என்பது M,N என்ற உள்வெளிகளின் நேர்கூட்டலாகக் எடுத்துக் கொள்வோமானால், அதாவது $L=M\oplus N$ எனில், L-ல் உள்ள ஒவ்வொரு z-ஐயும் $z=x+y,x\in M,y\in N$ என ஒரே ஒரு வழியில் எழுதலாம் என்பதை மீண்டும் நினைவூட்டப்படுகிறது. இந்த வெளி L-ல் $E(z)=x$ என்ற சார்பு நேரியல் உருமாற்றமாக அமைகின்றது. இந்த உருமாற்றத்தை N-ன் வழியாக M-ன் மீது **வீழல்** (Projection) என வரையறை செய்வோம்.

7. அறமம் (Algebra)

இது வரை அறம அமைப்புகளின் குலம், வளையம், புலம் மற்றும் நேரியல் வெளிகள் பற்றி மிகவும் சுருக்கமாகப் பார்த்தோம். இந்தப் பகுதியின் இறுதியாக அறமம் பற்றிக் காணலாம்.

A-என்ற நேரியல் வெளியில் திசையப் பெருக்கல் கீழ்க்கண்ட கட்டுப்பாடுகளை நிறைவு செய்யுமானால் அது **அறமம்** எனப்படும்.

$$(1)\ x(yz)=(xy)z,\qquad x,y,z\in A$$

(2) $x(y+z) = xy + xz,$

$(x+y)z = xz + yz \quad x, y, z \in A$

(3) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y), \alpha \in F$

இங்கு F என்பது மெய்யெண் கணமானால், அறமம் A-ஆனது மெய் அறமம் (Real Algebra) எனப்படும். F-மெய்புனையெண் கணமானால், A-என்பது மெய்புனையெண் அறமம் (Complex Algebra) எனப்படும். அறமம் A-ஆனது

(4) $xy = yx, \quad x, y \in A$

என்ற கட்டுப்பாட்டை நிறைவு செய்யுமானால் பரிமாற்று அறமம் (Commutative Algebra) எனப்படும். அறமம் A-ஆனது

(5) $1.x = x.1 = x, x \in A$

என்றவாறு 1 என்ற முற்றொருமை உறுப்பை உள்ளடக்கியிருக்குமானால் அது முற்றொருமையுடன் கூடிய அறமம் எனப்படும்.

இவற்றிலிருந்து அறமம் என்பது ஒரு நேரியல் வெளி மற்றும் வளையம் என்பதை மிகவும் தெளிவாக உணரமுடிகிறது. A_0 என்பது அறமம் A-ன் வெற்றற்ற உள்கணம் என்க. A-ல் உள்ள அதே செயல்களைப் பொறுத்து A_0 ஒரு அறமமாக அமையுமானால், A_0 என்பது A-ன் உள் அறமம் (Sub Algebra) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு1

R-என்பது மெய்யெண்களின் கணம். இது கூட்டல் மற்றும் பெருக்கலைப் பொறுத்து முற்றொருமை உறுப்புடைய பரிமாற்று மெய் அறமம் ஆகும்.

A-என்ற அறமத்தின் உட்கணம் I-ஆனது A-ன் உள்வெளியாகவும், சீர்வளையமாகவும் இருக்குமானால், அது **அறமச் சீர்வளையம்** (Algebra Ideal) எனப்படும்.

பின்வரும் பகுதிகளில் அறமத்தைப் பற்றி விரிவாகக் காணலாம்.

ஔஔஔஔ

பகுதி - 2

பானக் வெளிகள்
(Banach Spaces)

இந்தப் பகுதியில், தொடர்ச்சியான நேரியல் உருமாற்றம் தொடர்புடைய மூன்று அடிப்படைத் தேற்றங்களை மையமாகக் கொண்டு பெரும்பான்மையான தேற்றங்கள் விவரிக்கப்பட்டுள்ளன. அதாவது ஹான் பானக் தோற்றம், திறந்த சார்பிடல் தேற்றம், சீரான வரம்புறுத் தேற்றம் ஆகிய மூன்று தேற்றங்களும் அவற்றோடு தொடர்புடைய துணைத் தேற்றங்களும் இப்பகுதியில் இடம்பெற்றுள்ளன. இந்தக் கோட்பாடுகள் அனைத்தும் பகுப்பாய்விலிருந்து தொடங்கப்பட்டாலும் அதன் அமைப்பு மற்றும் கட்டமைப்பு ஆகியவற்றைப்பற்றி இங்குப் படிப்பதே நமது முக்கிய நோக்கமாகும்.

8. வரையறை மற்றும் எடுத்துக்காட்டுகள்

N என்ற நேரியல் வெளியில் (linear space) உள்ள ஒவ்வொரு திசையன் (Vector) x-க்கும் அதற்குத் தகுந்தாற்போல் $\|x\|$ என்ற மெய்யென் கீழ்க்கண்ட கட்டுப்பாடுகளைக் கொண்டிருக்குமானால்

(i) $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$,

N - என்பது **அலகை நேரியல் வெளி** (Normed linear space) எனப்படும். இங்கு $\|x\|$ - என்பது x - ன் அலகை எனப்படும். இது N - ன் மீது வரையறை செய்யப்படும் மெய்யெண் சார்பு ஆகும். மேலும் $\|x\|$ என்பதை x - ன் நீளம் எனவும் கருதலாம். ஒவ்வொரு அலகை நேரியல் வெளியும், ஓர் அளவை வெளி (Metric space) அல்லது யாப்பு வெளி என, $d(x,y) = \|x - y\|$ என்ற யாப்பைப் பயன்படுத்தி நிறுவலாம்.

ஒரு முழு அலகை நேரியல்வெளி என்பது **பானக் வெளி** (Banach space) எனப்படும். இங்கு பானக் வெளியைப் பற்றி விரிவாகப் படிப்பதே நமது நோக்கமாகும். பல எளிமையான ஆனால் மிகவும் முக்கியமான அலகை நேரியல் வெளி தொடர்புடைய கோட்பாடுகள் யாவும்

$$\big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \le \|x - y\| \qquad - \qquad (1)$$

என்ற சமனிலியை அடிப்படையாகக் கொண்டவையாகும்.

தேற்றம் 8.1

N என்பது அலகை நேரியல் வெளி எனில்

$\big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \le \|x - y\|, x, y \in N$ ஆகும்

நிறுவல்

$x, y \in N$ எனில், $\|x\| = \|x - y + y\| \le \|x - y\| + \|y\|$

அதாவது $\|x\| - \|y\| \le \|x - y\|$ - (2)

இவற்றிலிருந்து, $-(\|x\| - \|y\|) = \|y\| - \|x\| \le \|y - x\| = \|x - y\|$

எனவே $\|x\| - \|y\| \ge -\|x - y\|$ - (3)

சமன்பாடு (2), (3) ஆகியவை இணைந்து சமன்பாடு (1)-ஐக் கொடுக்கிறது.

சமன்பாடு (1)-லிருந்து, அலகை (Norm) தொடர்ச்சியானதென எளிதில் நிறுவலாம்.

தேற்றம் 8.2

N - என்பது அலகை நேரியல் வெளி எனில், $\|\cdot\| : N \to R$ என்ற அலகை தொடர்ச்சியானதாகும்.

நிறுவல்: தேற்றம் 8.1-ன் படி $\big|\,\|x_n\| - \|x\|\,\big| \le \|x_n - x\|$ - (4)

நாம் இப்போது $\{x_n\}$ என்ற தொடர்வரிசை (Sequence) N-ல், x என்ற புள்ளியில் குவிகிறது என எடுத்துக் கொள்வோம். எனவே (4)-ன் வலதுபுறம், $n \to \infty$ எனும் போது, பூச்சியத்தை நெருங்கும். அதனால் இடதுபுறமும் பூச்சியத்தை நெருங்கும். இவற்றிலிருந்து, $\{\|x_n\|\}$ என்ற தொடர் வரிசை $\|x\|$-ல் குவியும். எனவே அலகை என்பது தொடர்ச்சியானதாகும்.

தேற்றம் 8.3

N என்ற அலகை நேரியல் வெளியில் கூட்டல் மற்றும் அளவன் பெருக்கல் தொடர்ச்சியானவையாகும்.

நிறுவல்: கூட்டல் மற்றும் அளவன் பெருக்கல் தொடர்ச்சியானவை என நிறுவுவதற்குப் Ã] éVi. , $n \to \infty$ எனும் போது;, $x_n \to x$, $y_n \to y$, $\alpha_n \to \alpha$ நெருங்கும் என எடுத்துக்கொண்டு $x_n + y_n \to x + y$, $\alpha x_n \to \alpha x$ என நிறுவினால் போதுமானதாகும்.

இப்போது, $\| (x_n + y_n) - (x + y) \| \leq \| x_n - x \| + \| y_n - y \|$. இங்கு n அளவிலியை நெருங்கும் போது $\| x_n - x \|$, $\| y_n - y \|$ ஆகியவை பூச்சியத்தை நெருங்கும். எனவே மேலே உள்ள சமனிலியின் வலது புறமும் பூச்சியத்தை நெருங்கும். இவற்றிலிருந்து $\{x_n + y_n\}$ என்ற தொடர்வரிசை $x + y$- ல் குவியும் என்பது நிறுவப்படுகிறது.

இதே போல $\| \alpha_n x_n - \alpha x \| = \| \alpha_n (x_n - x) + (\alpha_n - \alpha) x \| \leq |\alpha_n| \| x_n - x \| + |\alpha_n - \alpha| \|x\|$. இங்கு $n \to \infty$ எனும் போது, இச்சமனிலியின் வலது புறம் பூச்சியத்தை நெருங்கும். அதனால் இடதுபுறமும் பூச்சியத்தை நெருங்கும் எனவே $\{\alpha_n x_n\}$ என்ற தொடர்வரிசை αx-ல் குவியும் என்பது நிறுவப்படுகிறது.

இவற்றிலிருந்து கூட்டல் மற்றும் அளவன் பெருக்கல் தொடர்ச்சியானவை என்பது, நமக்குத் தெரிந்த தேற்றத்தின் படி, தெளிவாகிறது.

பானக் வெளிகளுக்கு சில எடுத்துக்காட்டுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 1: R மற்றும் C என்ற நேரியல் வெளிகள் $\| x \| = |x|$, $x \in R$ அல்லது $x \in C$ என்ற அலகை பொறுத்து அலகை நேரியல் வெளி ஆகும். மேலும் இரு ஒரு பானக் வெளி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2: $R^n = \{(x_1, x_2, \ldots x_n) : x \in R\}$, $C^n = \{(x_1, x_2 \ldots x_n) : x \in C\}$ என்ற நேரியல் வெளிகளுக்குப் பல வகைகளில் அலகை வரையறை செய்யலாம். அவற்றில் ஒன்று

$$\|x\| = \left(\sum_1^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

என்பதாகும். இந்த அலகைப் பொறுத்து R^n மற்றும் C^n அலகை நேரியல் வெளிகள் ஆகும். இந்த இரு வெளிகளுமே பானக் வெளிகள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3: P என்பது $1 \leq P < \infty$ என்றவாறு உள்ள மெய்யெண் எனில்,

$l_p^n = \{(x_1, x_2, \ldots x_n) : x_i \in R\}$ என்பது ஒரு நேரியல் வெளி, இந்த வெளி

$$\| x \|_p = \left(\sum_1^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

என்ற அலகைப் பொறுத்து ஒரு பானக் வெளி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4: p என்பது $1 \leq P < \infty$ என்றவாறு உள்ள மெய்யெண் எனில்,

$l_p = \{(x_1, x_2, \ldots) : x_i \in R\}$ என்பது நேரியல் வெளி. இந்த வெளி

$$\| x \|_p = \left(\sum_1^\infty |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

என்ற அலகைப் பொறுத்து ஒரு பானக் வெளி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5: X என்பது ஒரு திணைய வெளி (Topological Space). C (x) என்பது X-ன் மீது வரையறை செய்யப்பட்ட அனைத்து வரம்புடைய தொடர்ச்சியான அளவன் மதிப்புடைய சார்புகளின் கணம். இந்தக் கணம் சார்புக் கூட்டல் மற்றும் அளவன் பெருக்கலைப் பொறுத்து ஒரு நேரியல் வெளி ஆகும். இந்த வெளி, $\| f \| = \sup | f(x) |$ என்ற அலகைப் பொறுத்து ஒரு பானக் வெளி ஆகும்.

தேற்றம் 8.4: M என்பது N என்ற நேரியல் வெளியின் மூடிய உள்வெளி. N/M என்ற ஈவு வெளியில் உள்ள இடது இணைக்கணம் x + M –ன் அலகை

$$\| x+M \| = \inf\{\| x+m \| : m\in M \} \qquad (6)$$

என வரையறுக்கப்படும் போது, N/M ஒரு அலகை நேரியல் வெளி ஆகும். மேலும் N ஒரு பானக் வெளி எனில், N/M –ம் ஒரு பானக் வெளி ஆகும்.

நிறுவல்: N/M என்பது $(x+M) + (y+M) = (x+y) + M$ மற்றும் $\alpha (x+M) = \alpha x + M$ என்ற செயல்களைப் பொறுத்து ஓர் ஈவு வெளி (Quotient space) ஆகும். இந்த வெளியில் $\|x+M\|=\inf\{\| x+m \| : m\in M\}$ என வரையறை செய்யப்படுகிறது. முதலில் $\| x+M \|$ என்பது ஓர் அலகை என நிறுவ வேண்டும். இங்கு, $\| x+M \| \geq 0$ என்பது வரையறையின் படி மிகவும் எளிதானதாகிறது. M-என்பது N-ல் மூடிய உள்வெளி. $\| x+M \| = 0$ எனும் போது அதற்குத் தகுந்தாற் போல் $n\to\infty \Rightarrow \|x+m_k \|\to 0$ என்றவாறு $\{m_k\}$ என்ற தொடர்வரிசை M-ல் இருக்கும். இவற்றிலிருந்து $x\in M$ என்பது தெளிவாகிறது. எனவே x+M=M, இங்கு M என்பது N/M –ல் பூச்சிய உறுப்பு. எனவே $\| x+M \| = 0 \Leftrightarrow x+M = 0$

அடுத்ததாக,
$$\begin{aligned}\| (x+M) + (y+M) \| &= \| (x+y) + M \| \\ &= \inf \{\| x+y + m \| : m \in M\} \\ &= \inf \{\| x+y + m_1 + m_2\|:m_1,m_2 \in M \} \\ &\leq \inf \{\| x+m_1\| + \|y +m_2\|: m_1, m_2 \in M \} \\ &= \inf \{\| x+m_1\| : m_1\in M\} + \inf \{\| y + m_2\| : m_2\in M\} \\ &= \| x + M \|+ \| y + M \|\end{aligned}$$

அதாவது $\| (x+M) + (y+M)\| \leq \| x+M\| + \|y + M\|$. இதே போல $\| \alpha (x +M) \| = |\alpha| \| x +M\|$ எனவும் நிறுவலாம். இவற்றிலிருந்து, (6)–ல் வரையறை செய்யப்பட்ட அலகை, அலகைக்குரிய கட்டுப்பாடுகளை நிறைவு செய்கிறது என்பது தெளிவாகிறது. எனவே N/M ஓர் அலகை நேரியல் வெளி ஆகும்.

N-என்பது முழு அலகை நேரியல் வெளி என எடுத்துக் கொள்வோம் N/M -ம் முழு அலகை நேரியல் வெளி என நிறுவ வேண்டும். இதனை நிறுவுவதற்குப் பதிலாக N/M -ல் உள்ள ஒவ்வொரு காசியின் தொடர் வரிசையும் குவியும் தன்மையுள்ள உள்தொடர்வரிசையைக் கொண்டிருக்கும் என நிறுவினால் போதுமானதாகும். எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட காசியின் தொடர்வரிசையிலிருந்து $\|(x_1+M)-(x_2+M)\|<½$,

$\| (x_2+M)-(x_3+M)\| < 1/4, \ldots \ldots \| (x_n+M)-(x_{n+1}+M)\| < 1/2^n$ என்ற வாறு உள்ள $\{x_n+M\}$ என்ற தொடர் வரிசையை உருவாக்கலாம். இந்த தொடர் வரிசை N/M -ல் குவியும் என நிறுவ வேண்டும். y_1 என்பது x_1+M என்ற இணைக் கணத்திலும் y_2 என்பது x_2+M என்ற இணைக்கணத்தில் ஏதாவது ஒரு திசையனும் $\| y_1 - y_2 \| < 1/2$ என உள்ளவாறு எடுத்துக் கொள்வோம். இதே போல, x_3+M-ல் y_3 என்ற திசையனை $\|y_2-y_3\|<1/4$ என உள்ளவாறு எடுத்துக்கொள்வோம். இதே முறையை மீண்டும் மீண்டும் பின்பற்றி $\|y_n-y_{n+1}\| < 1/2^n$ என உள்ளவாறு $\{y_n\}$ என்ற தொடர் வரிசையை உருவாக்கலாம்.

இங்கு $n > m$ எனில்,

$$\| y_m - y_n \| \le \| y_m - y_{m+1} \| + \| y_{m+1} - y_{m+2} \| + \ldots \|y_{n-1} - y_n\|$$
$$< 1/2^m + 1/2^{m+1} + \ldots + 1/2^{n-1}$$
$$< 1/2^{m-1}$$

அதாவது $n > m$ எனும் போது $\|y_m - y_n\| < 1/2^{n-1}$ ஆகும். எனவே $\{y_n\}$ என்பது N-ல் ஒரு காசியின் தொடர்வரிசையாகும். இங்கு N-என்பது முழு அலகை நேரியல் வெளி. எனவே $\{y_n\}$ க்கு தகுந்தாற் போல் N-ல் y என்ற திசையின் $n\to\infty$ எனும் போது, $y_n \to y$ என்றவாறு இருக்கும். அதாவது $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.

இப்போது
$$\| (x_n+M) - (y+M) \| = \| (x_n - y) + M \|$$
$$= \inf \{ \| (x_n-y) + m \| : m\in M\}$$
$$\le \| x_n - y \|$$

அதாவது $\| (x_n+M) - (y+M) \| \le \| x_n - y \|$. இங்கு $n\to\infty$ எனும் போது $\| x_n - y \| \to 0$, எனவே இடதுபுறமும் $\|(x_n+M) - (y+M)\| \to 0$ ஆகும். இவற்றிலிருந்து N/M என்பது ஒரு முழு அலகை நேரியல் வெளி என நிறுவப்படுகிறது. எனவே N/M ஒரு பானக் வெளி ஆகும்.

பயிற்சிக் கணக்குகள்:

1. N என்பது பூச்சியமல்லாத அலகை நேரியல் வெளி எனில் அது பானக் வெளி ஆகத் தேவையான மற்றும் போதுமான கட்டுப்பாடு $\{x : \| x \| = 1\}$ என்பது ஒரு முழு வெளி ஆகும்.

2. பானக் வெளி B என்பது M, N என்ற உள்வெளிகளின் நேர் கூட்டல் $B = M \oplus N$, மற்றும் $z\in B$ என்ற திசையனை $z = x+y$, $x\in M$, $y\in N$ என ஒரே ஒரு முறையில், எழுதுவோமானால், $\|z\|_1 = \| x \| + \| y \|$ என்பது B - ன் அலகை ஆகும்.

3. ஹோல்டர்ஸ் சமனிலி (Holder's inequality)

$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \|x\|_p \|y\|_q$ -ஐ நிறுவுக. இங்கு $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

4. மின்கௌஸ்கி சமனிலி (Minkowski's inequality) $\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$ - ஐ நிறுவுக.

9. தொடர்ச்சியான நேரியல் உருமாற்றங்கள்

தொடர்ச்சியான உருமாற்றம் மற்றும் அதன் தன்மைகள் ஆகியவற்றைப் பற்றி இந்தப் பகுதியில் காணலாம். N,N′ என்பன ஒரே அளவன் புலத்தைப் (Scalar field) பொறுத்து அலகை நேரியல் வெளிகள் என்க. T என்பது N லிருந்து N′-க்கு நேரியல் உருமாற்றம் எனில், $x \in N$ என்ற புள்ளியில் தொடர்ச்சியான உருமாற்றமாக அமைய $\{x_n\}$ என்ற தொடர்வரிசை x-ல் குவியும் எனில் $\{T(x_n)\}$ என்ற வரிசைத் தொடர் T(x)-ல் குவியும் என்பது தெரிந்த ஒன்றே. இந்தப் பகுதியின் முக்கிய நோக்கமே பல வரையறைகள் உருவாக்குவதும், வெளி N-லிருந்து N′-க்கு வரையறை செய்யப்படும் அனைத்து நேரியல் உருமாற்றங்களையும் ஓர் அலகை நேரியல் வெளியாக்குவதுமேயாகும்.

தேற்றம் 9.1

N,N′ என்பது அலகை நேரியல் வெளிகள் என்க. T என்பது N-லிருந்து N′-க்கு நேரியல் உருமாற்றம் எனில், கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கட்டுப்பாடுகள் ஒன்றுக்கொன்று சமமானவையாகும்.

(i) T- தொடர்ச்சியானது

(ii) பூச்சியத்தில் T தொடர்ச்சியானது. அதாவது $x_n \to 0 \Rightarrow T(x_n) \to 0$

(iii) N-ல் உள்ள ஒவ்வொரு x-க்கு தகுந்தாற்போல் $\|T(x)\| \le k\|x\|$ என்ற தன்மையுடைய $k > 0$ என்ற மெய்யெண் இருக்கும்.

(iv) $S = \{x : \|x\| \le 1\}$ என்பது N-ல் மூடிய அலகுக் கோளம் எனில், T(S) என்பது N′-ல் வரம்புடையதாகும்.

நிறுவல்: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) T தொடர்ச்சியானது என எடுத்துக் கொள்வோம். மேலும் $T(0) = 0$ எனவே $x_n \to 0 \Rightarrow T(x_n) \to T(0) = 0$, இவற்றிலிருந்து T என்பது பூச்சியத்தில் தொடர்ச்சியானது என்பது நிறுவப்படுகிறது. மறுதலையாக, T- என்பது பூச்சியத்தில் தொடர்ச்சியானது எனில்

$$\begin{aligned} x_n \to x &\Rightarrow x_n - x \to 0 \\ &\Rightarrow T(x_n - x) \to 0 \\ &\Rightarrow T(x_n) - T(x) \to 0 \\ &\Rightarrow T(x_n) \to T(x) \end{aligned}$$

எனவே T என்பது x-ல் தொடர்ச்சியானது. அதனால் N-ல் தொடர்ச்சியனாது

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) T என்ற சார்பு பூச்சியத்தில் தொடர்ச்சியானது என எடுத்துக்கொள்வோம்.

மேலும் (iii)-ல் உள்ளது போல எந்த ஒரு மெய்யெண் K-யும் இல்லை என எடுத்துக்கொள்வோம். எனவே ஒவ்வொரு நேர்மமுழு எண் n-க்கும் அதற்கு தகுந்தாற்போல் $\| T(x_n) \| > n \| x_n \|$ என்ற கட்டுப்பாட்டை நிறைவு செய்யுமாறு உள்ள $\{x_n\}$ என்ற தொடர்வரிசையை N- ல் எடுத்துக் கொள்வோம்.

அதனால், $\| T(x_n / n \| x_n \|) \| > 1$ எனக் கிடைக்கும். எனவே $\| T(y_n) \| > 1$. இங்கு $y_n = x_n / n \| x_n \|$ இவற்றிலிருந்து, y_n பூச்சியத்தை நெருங்கும் போது $T(y_n)$ பூச்சியத்தை நெருங்காது என்பது தெளிவாகிறது. எனவே T என்பது பூச்சியத்தில் தொடர்ச்சியானதல்ல என்பது நிறுவப்படுகிறது.

மறுதலையாக N-ல் உள்ள ஒவ்வொரு x-க்கும் அதற்குத் தகுந்தாற் போல் $\| T(x) \| \leq K \| x \|$ என்ற தன்மையுடைய $k \geq 0$ என்ற மெய்யெண் இருக்கும் என எடுத்துக்கொள்வோம். இவற்றிலிருந்து $\| T(x_n) \| \leq k \| x_n \|$. எனவே $x_n \to 0$ எனும் போது $T(x_n) \to 0$ எனவாகும். அதாவது T என்பது பூச்சியத்தில் தொடர்ச்சியானதாகும்.

(iii) $\leftrightarrow$ (iv) ஓர் அலகை நேரியல் வெளியின் வெற்றற்ற உட்கணம், வரம்புடையதாக அமைய தேவையான மற்றும் போதுமான கட்டுப்பாடு, அந்த உட்கணம் ஆதிப்புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட மூடிய கோளத்தினுள் அடங்கியிருக்கும் என்பது நமக்குத் தெரியும். இவற்றிலிருந்து $\| x \| \leq 1$ எனில் $\| T(x) \| \leq k \| x \|$ ல் பிரதியிட, $\| T(x) \| \leq k$ எனக் கிடைக்கும். அதாவது T(S) வரம்புடையதாகும். மறுதலையாக T(S) என்ற கணம் ஆதிப்புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட k- ஆரமுடைய மூடிய கோளத்தினுள் அடங்கியிருக்கும் என எடுத்துக்கொள்வோம். $x = 0$ எனும் போது $T(x) = 0$ ஆகும். எனவே $\| T(x) \| \leq k \| x \|$ என நிறுவப்படுகிறது. $x \neq 0$ எனும் போது $x / \| x \|$ என்ற திசையன் S- ல் இருக்கும். எனவே $\| T(x / \| x \|) \| \leq k \to \| T(x) \| \leq k \| x \|$

வரம்புடைய நேரியல் உருமாற்றம்

T என்ற நேரியல் உருமாற்றம் $\| T(x) \| \leq k \| x \|$, $x \in N$ என்ற கட்டுப்பாட்டை நிறைவு செய்யுமாறு அதற்குத்தகுந்தாற் போல் $k \geq 0$ என்ற மெய்யெண் இருக்கும் எனில், k என்பது T- ன் வரம்பு (bound) எனப்படும். இந்த உருமாற்றம் T-ஐ, வரம்புடைய நேரியல் உருமாற்றம் எனலாம். எனவே தேற்றம் 9.1-ன் படி நேரியல் உருமாற்றம் T தொடர்ச்சியானதாக அமைய தேவையான மற்றும் போதுமான கட்டுப்பாடு T வரம்புடையதாகும். நேரியல் உருமாற்றம் T-ன் அலகை

$$\| T \| = \sup \{ \| T(x) \| : \| x \| \leq 1 \} \quad - \qquad (7)$$

என வரையறை செய்யலாம். $N \neq \{0\}$ எனும் போது இந்த அலகை வரையறையினை

$$\| T \| = \sup \{ \| T(x) \| : \| x \| \leq 1 \} \quad - \qquad (8)$$

எனவும் எழுதலாம். மேலும் தேற்றம் 9.1.-ன்படி T-ன் அனைத்து வரம்புகளின் கணமும்

T(S)- உள்ளடக்கிய ஆதிப்புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட அனைத்து மூடிய கோளங்களின் ஆரங்களின் கணமும் சமம். இவற்றிலிருந்து T-ன் அலகை மற்றொரு வகையிலும் வரையறுக்கலாம். அதாவது

$$\| T \| = \inf\{k : k \geq 0 \text{ மற்றும் } \| T(x) \| \leq k \| x \|, x \in N\} \quad - \quad (9)$$

இவற்றிலிருந்து $\| T(x) \| \leq \| T \| \| x \|, x \in N$ - (10)

N என்ற நேரியல் வெளியிலிருந்து N′ என்ற நேரியல் வெளிக்கு வரையப்படும் அனைத்துத் தொடர்ச்சியான நேரியல் உருமாற்றங்களின் கணத்தை $\mathcal{B}(N, N')$ எனக் குறிப்பிடலாம். இந்தக் கணம் $(T_1 + T_2)x = T_1(x) + T_2(x)$ மற்றும் $(\alpha T)x = \alpha (T(x))$ என்ற இருமச் செயலியைப் பொறுத்து நேரியல் வெளி ஆகும்.

தேற்றம் 9.2

N மற்றும் N′ என்பன நேரியல் வெளிகள். $\mathcal{B}(N, N')$ என்பது $(T_1 + T_2)x = T_1(x) + T_2(x)$, $(\alpha T)x = \alpha (Tx)$, $\alpha \in F, x \in N$ என்ற நேரியல் செயலி (Linear operator) யைப் பொறுத்து ஓர் நேரியல் வெளியாகவும் $\| T \| = \sup\{\| T(x) \| : \| x \| \leq 1\}$ என்ற அலகைப் பொறுத்து, ஒரு அலகை நேரியல் வெளி ஆகவும் இருக்கும். மேலும் N′ என்பது ஒரு பானக் வெளி எனில் $\mathcal{B}(N, N')$ என்பதும் ஒரு பானக் வெளி ஆகும்.

நிறுவல்: $\mathcal{B}(N, N')$ என்பது ஓர் நேரியல் வெளி என நிறுவுவது மிகவும் எளிதானதாகும். எனவே அதனை படிப்பவர்களுக்கே விடப்படுகிறது. நாம் இப்போது N′ முழு வெளி எனும் போது $\mathcal{B}(N, N')$ ம் ஓர் முழு வெளி என நிறுவ வேண்டும்.

$\{T_n\}$ என்பது $\mathcal{B}(N, N')$-ல் காசியின் தொடர்வரிசை என்க. x என்பது N-ல் ஏதாவது ஒரு திசையன் எனில், $\| T_m(x) - T_n(x) \| = \| (T_m - T_n)x \| \leq \| T_m - T_n \| \| x \|$. இவற்றிலிருந்து $\{T_n(x)\}$ என்பது N-ல் ஒரு காசியின் தொடர் வரிசை என்பது தெளிவாகிறது. ஆனால், N′ ஒரு முழு நேரியல் வெளி, எனவே $\{T_n(x)\}$-க்குத் தகுந்தாற் போல் N-ல் T (x) என்ற ஒரு திசையன், $n \to \infty$ எனும் போது $T(x_n) \to T(x)$ என்றவாறு இருக்கும். இதனிடையில் $T(x) = \lim_{n \to \infty} T_n(x)$ என்ற நேரியல் உருமாற்றத்தை N-லிருந்து N′-க்கு வரையறை செய்யலாம். இந்த நிரூபணத்தை முடிவுக்கு கொண்டு வருவதற்கு, T தொடர்ச்சியானது மற்றும் $\mathcal{B}(N, N')$-ல் உள்ள அலகைப் பொறுத்து $T_n \to T$ என நிறுவினால் போதுமானதாகும். $\| T(x) \| = \| \lim T_n(x) \| = \lim \| T_n(x) \| \leq \sup(\| T_n \| \| x \|) = (\sup \| T_n \|) \| x \|$. இவற்றிலிருந்து T என்பது வரம்புடையதாகும், எனவே தொடர்ச்சியானது என்பது தெளிவாகிறது. இங்கு $\{T_n\}$ ஒரு காசியின் தொடர் வரிசை எனவே, கொடுக்கப்பட்ட $\in > 0$ அதற்கு தகுந்தாற் போல் n_0 என்ற நேர்ம முழு எண் $\| T_m - T_n \| < \in$, $m, n > n_0$ என்ற கட்டுப்பாட்டை நிறைவு செய்யுமாறு இருக்கும். $\|x\| \leq 1$ எனில் $m, n \geq n_0$ எனும் போது $\| T_m(x) - T_n(x) \| = \| (T_m - T_n)(x) \| \leq \| T_m - T_n \| \| x \| \leq \| T_m - T_n \| < \in$ ஆகும்.

அதாவது $\| T_m(x) - T_n(x) \| < \in$, $m,n > n_0$. இந்தச் சமனிலியில் m-ஐ நிலை எண்ணாகவும், $n \to \infty$ ஆகவும் எடுத்துக் கொள்வோமானால் $\| x \| \leq 1$ என்றவாறு உள்ள அனைத்து $x \in N$ க்கும், $\| T_m(x) - T(x) \| < \in$, $m > n_0$ எனக் கிடைக்கும்.

எனவே $m > n_0$ எனும் போது $\| T_m - T \| < \in$ ஆகும். இவற்றிலிருந்து $\{T_n\}$ என்ற தொடர் வரிசை T- ல் குவியும் என்பது நிரூபணமாகிறது.

N என்பது அலகை நேரியல் வெளி. N-லிருந்து N-க்கு வரையறுக்கப்படும் தொடர்ச்சியான நேரியல் உருமாற்றம், **செயலி** (operator) எனப்படும். N-ன் மீது வரையப்படும் அனைத்துச் செயலிகளின் கணத்தை $\mathcal{B}(N)$ என குறிப்பிடலாம். தேற்றம் 9.2 - ன் படி N பானக் வெளி எனும் போது $\mathcal{B}(N)$ ம் ஒரு பானக் வெளி ஆகும். மேலும்,

$$\begin{aligned} \| T T' \| &= \sup \{ \|(TT')(x)\| : \|x\| \leq 1 \} \\ &= \sup \{ \|T(T'(x)\| : \|x\| \leq 1 \} \\ &\leq \sup \{ \|T\| \|T'(x)\| : \|x\| \leq 1 \} \\ &= \|T\| \|T'\| \end{aligned}$$

அதாவது, $$\| T T' \| \leq \|T\| \|T'\| \qquad - \qquad (11)$$

முந்தைய பகுதியிலிருந்து கூட்டல் மற்றும் அளவன் பெருக்கல் $\mathcal{B}(N)$-ல் தொடர்ச்சியானது என்பது தெளிவாகிறது. சமன்பாடு 11-ஐப் பயன்படுத்திப் பெருக்கலும் தொடர்ச்சியானது என நிறுவலாம்.

தேற்றம் 9.3

N என்பது அலகை நேரியல் வெளி எனில், $\mathcal{B}(N)$- ல் பெருக்கல் தொடர்ச்சியானதாகும்.

நிறுவல்: T, T′ என்பன $\mathcal{B}(N)$-ல் தொடர்ச்சியானது. T T′ தொடர்ச்சியானது என நிறுவ வேண்டும். இதற்குப் பதிலாக $n \to \infty$ எனும் போது $T_n \to T$, $T_n' \to T'$எனில் $T_nT_n' \to TT'$ என நிறுவினால் போதுமானதாகும். இப்போது $\| T_nT_n' - TT' \| = \| T_nT_n' - T_nT' + T_nT' - TT' \| \leq \|T_n\| \| T_n' - T' \| + \| T_n - T \| \| T' \|$. இப்போது $n \to \infty$ எனும் போது மேலே உள்ள சமனிலியின் வலதுபுறம் பூச்சியத்தை நெருங்கும். எனவே இடதுபுறமும் பூச்சியத்தை நெருங்கும். இவற்றிலிருந்து $T_nT_n' \to TT'$ என்பது தெளிவாகிறது.

N, N′ என்பன அலகை நேரியல் வெளிகள். N-லிருந்து N′-க்கு வரையப்படும் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடையே நேரியல் உருமாற்றம் T ஆனது, $\| T(x) \| = \| x \|$, $x \in N$ எனும் போது, **சமயாப்புள்ள சம ஒப்புமைச் சார்பு** (Isometric isomorphism) எனப்படும்.

10. ஹான் பானக் தேற்றம் (Hahn-Banach Theorem)

R மற்றும் C என்பன மிகவும் எளிமையான அலகை நேரியல் வெளிகள் ஆகும். N-என்பது ஏதாவது ஒரு அலகை நேரியல் வெளி. N-லிருந்து R அல்லது C-க்கு வரையப்படும் அனைத்து தொடர்ச்சியான நேரியல் உருமாற்றம் $\mathcal{B}(N,R)$ அல்லது $\mathcal{B}(N,C)$ ஒரு அலகை நேரியல் வெளி ஆகும். இந்த அலகை நேரியல் வெளி N-ன் **இணையிய வெளி** (Conjugate space) எனப்படும். இதனை N*-எனக் குறிப்பிடலாம். N-ல் உள்ள உறுப்புகளைத் தொடர்ச்சியான நேரியல் சார்பின அல்லது அளவன் மதிப்புள்ள (Scalar valued) தொடர்ச்சியான நேரியல் சார்பு அல்லது சுருக்கமாகச் சார்பின (Functional) எனக் குறிப்பிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1

l_p^n என்பது அலகை நேரியல் வெளி, இந்த அலகை நேரியல் வெளியின் இணையிய வெளி l^n_q ஆகும். அதாவது $(l_p^n)^* = l_q^n$ இங்கு $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

துணைத் தேற்றம் 10.1

M என்பது அலகை நேரியல் வெளி N-ன் உள்வெளி என்க. மேலும் f என்பது M- ன் மீது வரையறை செய்யப்படும் சார்பின. x_0 என்பது M- ல் இல்லாது N- ல் உள்ள ஒரு திசையன். $M_0 = M+[x_0]$ என்பது M, x_0- ஆல் உருவாக்கப்படும் நேரியல் உள்வெளி எனில் f- ஐ, M_0 மீது $\| f_0 \| = \| f \|$ என்றவாறு உள்ள f_0 என்ற சார்பினவாக நீட்டிக்கலாம்.

__நிறுவல்:__ இந்த் துணைத் தேற்றத்தை, N என்பது மெய்யெண் நேரியல் வெளி என எடுத்துக்கொண்டு நிருபணம் செய்வோம். f-ன் பொதுமைப்பண்பு மாறாமல் $\| f \| = 1$ என எடுத்துக் கொள்வோம். X_0 என்பது M-ல் இல்லாத காரணத்தினால், N-ல் உள்ள ஒவ்வொரு y- ஐயும், $y = x+\alpha x_0,\ \alpha \in R, x\in M$ என ஒரே ஒரு அமைப்பில் விவரிக்கலாம். ஒவ்வொரு மெய்யெண் $r_0 = f_0(x_0)$ க்கும் $f_0(x+\alpha x_0) = f_0(x) + \alpha f_0(x_0) = f(x) + \alpha r_0$ என்ற வரையறைப்படி, f-ஐ f_0 என்ற சார்பினவாக M_oமீது நீட்டிக்கப்படுகின்றது.

இந்தப் பகுதியில், நமது நோக்கம் $\|f_o\| = 1$ என நிறுவுவதேயாகும். இதற்குப் பதிலாக, ஒவ்வொரு $x\in M$, ஒவ்வொரு $\alpha \neq 0$ க்கும் $|f_0(x+\alpha x_0)| \leq \| x+\alpha x_o\|$ என்றவாறு உள்ள ஒரு r_0 காண்பதேயாகும்.

இங்கு $f_0(x+\alpha x_0) = f(x)+\alpha r_0$, எனவே மேலே கொடுக்கப்பட்ட சமனிலியை

$-\| x + \alpha x_0\| \leq f(x) + \alpha r_0 \leq \| x+\alpha r_0\|$ என எழுதலாம் அல்லது

$-f(x) - \| x+\alpha x_0\| \leq \alpha r_0 \leq -f(x) + \| x+\alpha r_0 \|$ எனவும் எழுதலாம் மேலும்

$$-f(x/\alpha) - \|(x/\alpha)+x_0\| \leq r_0 \leq -f(x/\alpha) + \|(x/\alpha)+x_0\| \qquad - \qquad (12)$$

எனவும் குறிப்பிடலாம்.

$x_1, x_2 \in M$ எனில் $f(x_2) - f(x_1) = f(x_2 - x_1)$

$$\leq | f(x_2 - x_1) | \leq \| f \| \| x_2 - x_1 \|$$
$$= \| x_2 - x_1 \| = \| (x_2 + x_0) - (x_1 + x_0) \|$$
$$\leq \| x_2 + x_0 \| + \| x_1 + x_0 \|$$

அதாவது $- f(x_1) - \| x_1 + x_0 \| \leq - f(x_0) + \| x_2 + x_0 \|$ - (13)

எனவே, a,b என்ற இரண்டு மெய்யெண்களை கீழ்க்கண்டவாறு

$$a = \sup\{- f(x) - \| x + x_0 \| : x \in M\}$$
$$b = \inf\{- f(x) + \| x + x_0 \| : x \in M\}$$

என வரையறை செய்யலாம். எனவே (13) ன் படி $a \leq b$. நாம் இப்போது r_0 என்ற மெய்யெண் $a \leq r_0 \leq b$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்வோமானால். கொடுக்கப்பட்ட சமனிலி (12) நிறைவடைகிறது.

அடுத்ததாக மேலே நிறுவப்பட்ட முடிவைப் பயன்படுத்தி, N என்பது மெய்புனையெண் (Complex number) அலகை நேரியல் வெளி எனும் போதும் இந்தத் தேற்றத்தின் முடிவு பொருந்தும் என இரண்டாவது பகுதியில் நிறுவ வேண்டும். இங்கு f என்பது M- மீது வரையறுக்கப்படும் மெய்புனை மதிப்புச் சார்பு என்க. மேலும் $\| f \| = 1$ எனவும் எடுத்துக்கொள்வோம். g, h என்பது f- ன் மெய் மற்றும் கற்பனைப் பகுதி. அதாவது, $f(x) = g(x) + ih(x), x \in M$.இங்கு g, h என்பன மெய் அலகை நேரியல் வெளி M-ன் மீது மெய் மதிப்புச் சார்புகள் ஆகும். மேலும் $\| f \| = 1$ எனவே $\| g \| \leq 1$ ஆகும். சமன்பாடுகள்

$f(ix) = i f(x)$ மற்றும்

$f(ix) = g(ix) + ih(ix)$

$i f(x) = ig(x) - h(x)$ இணைந்து

$h(x) = - g(ix)$ எனக் கொடுக்கிறது. எனவே $f(x) = g(x) - ig(ix)$ என எழுதலாம். முந்தைய பகுதியில் உள்ள முடிவின் படி சார்பு g-ஐ g_0 என்ற மெய்மதிப்புச் சார்பாக M_0-மீது $\| g \| = \| g_0 \|$ என்றவாறு நீட்டிக்கலாம். மேலும் M_0 மீது f_0என்ற சார்பை $f_0(x) = g_0(x) - ig_0(ix)$ என வரையறை செய்வோம். f_0என்பது M_0- மீது f-ன் நீட்டிப்பு என்பதையும் $f_0(x + y) = f_0(x) + f_0(y)$, மற்றும் $f_0(\alpha x) = \alpha f_0(x)$, α மெய்யெண், எனவும் எளிதில் நிறுவலாம்.

$f_0(ix) = g_0(ix) - ig_0(i^2x) = g_0(ix) + ig_0(x) = i(g_0(x) - i g_0(ix)) = i f(x)$ என்ற முடிவிலிருந்து அனைத்து மெய்புனையெண் α –க்களுக்கும் மேலே கொடுக்கப்பட்ட தன்மைகள் பொருந்துகின்றன. எனவே f_0 என்பது M_0 என்ற மெய்புனை அலகை வெளியில் ஒரு மெய்புனை மதிப்புச் சார்பு ஆகும். இறுதியாக நாம் நிறுவ வேண்டியது $\| f_0 \| = 1$. இதனை நிறுவுவதற்கு $\| x \| = 1$ என்றவாறு உள்ள $x \in M_0$ என்ற திசையனுக்கு $| f_0(x) | \leq 1$ எனக் காண்பித்தால் போதுமானதாகும். $f_0(x)$ மெய்யெண் எனும்போது $f_0(x) = g_0(x)$ மற்றும் $\| g_0 \| \leq 1$ ஆகியவற்றிலிருந்து முடிவு எட்டப்படுகிறது. $f_0(x)$ மெய்புனையெண் எனில் $r > 0$ என்னும் போது $f_0(x) = re^{i\theta}$ என எழுதலாம். அதனால் $|f_0(x)| = r = e^{-i\theta} f_0(x) = f_0(e^{-i\theta} x)$. நமது முடிவு $\| e^{-i\theta} x \| = \| x \| = 1$ மற்றும் $f_0(e^{-i\theta} x)$ மெய்யெண் ஆகியவற்றிலிருந்து நிறுவப்படுகிறது.

தேற்றம் 10.2 (ஹான் பானக் தேற்றம்)

M என்பது N என்ற அலகை நேரியல் வெளியின் நேரியல் உள்வெளி மற்றும் f என்பது M-ன் மீது சார்பினச் சார்பு. எனில் f என்பதை $\| f_0 \| = \| f \|$ என்றவாறு f_0 என N மீது நீட்டிக்கலாம்.

நிறுவல்: $M_1, M_2, \ldots\ldots$.என்பன M-ஐ உள்ளடக்கிய ஒரே அலகையினால் உருவாக்கப்பட்ட N-ன் உள்வெளிகள் மற்றும் $f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots$ முறையே $M_1, M_2, \ldots\ldots$ மீது வரையறுக்கப்பட்ட f-ன் நீட்டிப்புகள். இந்த நீட்டிப்புக்கள் $f_i \leq f_j$ என்ற தொடர்பினால் உருவாக்கப்பட்ட பகுதி வரிசைப்படுத்தப்பட்ட ஒரு கணம். இங்கு $f_i \leq f_j$ என்பது f_i-ன் அரங்கம் (Domain) f_i- ன் அரங்கத்தினுள் அடங்கும், அரங்கம் f_j- ல் உள்ள அனைத்து x- களுக்கும் $f_i(x) = f_j(x)$ மேலும் ஏதாவது ஒரு நீட்டிப்புகளின் சங்கிலியின் சேர்ப்புக்கணம் (Union) மும் ஒரு நீட்டிப்பாகும். இந்த நீட்டிப்பு அந்தச் சங்கிலியின் மேல் எல்லை ஆகும். ஜோன் துணைத் தேற்றத்தின் (Zorn's lemma) படி அங்கு f_0 என்ற பெரும (Maximal) நீட்டிப்பு இருக்கும். இந்த நீட்டிப்பு f_0-ன் அரங்கம் வெளி N முழுமையும் ஆகும். அவ்வாறு இல்லையெனில் f_0-ஐ மேலும் நீட்டிக்கலாம். ஆனால் இது ஜோன்ஸ் துணைத் தேற்றத்திற்கு முரண்பாடாகும்.

தேற்றம் 10.3

N என்பது அலகை நேரியல் வெளி மற்றும் x_0 என்பது N-ல் உள்ள பூச்சியமல்லாத திசையன் எனில், அதற்குத் தகுந்தாற்போல் f_0 என்ற உறுப்பு N*-ல் $f_0(x_0) = \| x_0 \|$ மற்றும் $\| f_0 \| = 1$ என இருக்கும்.

நிறுவல்: $M = \{\alpha\, x_0\}$ என்பது, x_0- ஆல் உருவாக்கப்பட்ட, N-ன் நேரியல் உள்வெளி என்க. மேலும் f என்பதை M மீது $f(\alpha x_0) = \alpha \| x_0 \|$ என வரையறை செய்வோம். f என்பது M -ன் மீது $f(x_0) = \| x_0 \|$ மற்றும் $\| f \| = 1$ என்றவாறு ஒரு சார்பின என்பது தெளிவாகிறது. ஹான் பேனக் தேற்றத்தின்படி சார்பு f- ஐ f_0 என்ற சார்பினமாக N*- ன் மீது கொடுக்கப்பட்ட தன்மைகளையுடைய சார்பாக நீட்டிக்கலாம்.

இந்தத் தேற்றத்தின்படி N-ல் உள்ள திசையன்களை N* பிரிக்கின்றது. அதாவது x,y என்பன இரண்டு வெவ்வேறு திசையன்கள் எனில், $x - y \neq 0$. எனவே தேற்றத்தின்படி N*-ல் f என்ற சார்பு $f(x - y) \neq 0$ என இருக்கும். அதாவது $f(x) \neq f(y)$

தேற்றம் 10.4

M என்பது N என்ற அலகை நேரியல் வெளியின் மூடிய உள்வெளி மற்றும் x_0 என்பது M-ல் இல்லாத ஒரு திசையன் எனில், அதற்குத் தகுந்தாற் போல் N*-ல் f என்ற உறுப்பு $f_0(M) = 0$ மற்றும் $f_0(x_0) \neq 0$ என இருக்கும்.

நிறுவல்: $T(M) = 0$ மற்றும் $T(x_0) = x_0 + M \neq 0$ என்றவாறு உள்ள இயல் உருமாற்றம் N- லிருந்து N/M க்கு வரையறை செய்யப்படும் சார்பு T ஒரு தொடர்ச்சியான நேரியல் உருமாற்றமாகும். எனவே தேற்றம் 10.3-ன் படி அதற்குத் தகுந்தாற் போல் $(N/M)^*$-ல் f என்ற சார்பு $f(x_0 + M) \neq 0$ என இருக்கும். நாம் இப்போது $f_0(x) = f(T(x))$ என f_0-ஐ வரையறை செய்வோமானால் அது தேவையானத் தன்மைகளைக் கொண்டிருக்கும் என்பதை எளிதில் காண முடிகிறது.

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. M என்பது N-என்ற அலகை நேரியல் வெளியின் உள்வெளி மற்றும் T என்பது N லிருந்து N/M க்கு $T(x) = x + M$ என்றவாறு வரையறை செய்யப்படும் இயல் சார்பு எனில், $\|T\| \leq 1$ என்றவாறு உள்ள தொடர்ச்சியான நேரியல் உருமாற்றம் T ஆகும்.

2. T என்பது N- என்ற அலகை நேரியல் வெளியிலிருந்து N^1 என்ற அலகை நேரியல் வெளிக்கு வரையப்படும் தொடர்ச்சியான நேரியல் உருமாற்றம் மற்றும் M என்பது இதன் வெற்று வெளி (Null space)எனில், T-னால் தூண்டப்பட்ட T^1 என்ற இயல்பு நேரியல் உருமாற்றம் N/M லிருந்து N^1-க்கு $\|T\| = \|T^1\|$ என்றவாறு இருக்கும் என நிறுவுக.

3. M என்பது N என்ற அலகை நேரியல் வெளியின் உள்வெளி மற்றும் x_0 என்பது M-ல் இல்லாத ஒரு திசையன் என்க. d என்பது x_0-லிருந்து M-க்கு இடையே உள்ள தொலைவு எனில் அதற்கு தகுந்தாற் போல் N^*- ல் f என்ற சார்பு, $f_0(M) = 0$, $f_0(x_0) = 1$ மற்றும் $\|f_0\| = 1/d$ என்றவாறு, இருக்கும் என நிறுவுக.

N^{**} - ல் N -ன் இயல்பான பதித்தல் (Natural Imbedding of N in N^{**})

N என்ற அலகை நேரியல் வெளியின் இணையிய வெளி (Conjugate space) N^* என்பதும் ஒரு அலகை நேரியல் வெளி. எனவே N^* –க்கும் இணையிய வெளி $(N^*)^*$ –காண இயலும். இதனை இரண்டாம் இணையிய வெளி N^{**} எனக் குறிப்பிடலாம். இந்தப் பகுதியின் முக்கிய நோக்கம் N-ல் உள்ள ஒவ்வொரு x-க்கும் N^{**}-ல் ஒரு F_x-ஐ உருவாக்குவதேயாகும். N^*-ல் உள்ள உறுப்பினை f எனக் கொள்வோமானால் F_x என்ற சார்பை

$$F_x(f) = f(x) \qquad - \qquad (14)$$

என வரையறை செய்யலாம். N^{**} என்பது, N^*-ஐப் போலவே ஓர் அலகை நேரியல் வெளி ஆகும். N^*-லிருந்து N^{**}க்கு உள்ள சமயாப்புள்ள சம ஒப்புமை (Isometric Isomorphism) சார்பை N^{**}-ல் N-ன் இயல் பதித்தல் என்றழைக்கலாம்.

தேற்றம் 10.5

N என்பது ஒரு அலகை நேரியல் வெளி. N-ல் உள்ள ஒவ்வொரு x-ம் ஒரு F_x- ஐ $F_x(f) = f(x)$ என்றவாறு வரையறை செய்யப்படும் சார்பாகத் தூண்டுகிறது. இது $\| F_x \| = \| x \|$ என்ற தன்மையுடையது எனில் F_x ஒரு தொடர்ச்சியான நேரியல் உருமாற்றமாகும். மேலும் $J(x) = F_x$ என்றவாறு வரையறை செய்யப்படும் $J : N \to N^{**}$ என்ற சார்பு ஒரு சமயாப்புள்ள சம ஒப்புமைச் சார்பு ஆகும்.

நிறுவல்

முதலில், F_x ஒரு நேரியல் உருமாற்றம் என நிறுவ வேண்டும். $f, g \in N^*$ மற்றும் α, β அளவன்கள் எனில்,

$$\begin{aligned} F_x(\alpha f+\beta g) &= (\alpha f+\beta g)(x) \\ &= \alpha f(x)+\beta g(x) \\ &= \alpha F_x(f)+\beta F_x(g) \end{aligned}$$

எனவே F_x ஒரு நேரியல் உருமாற்றமாகும்.

இரண்டாவதாக, $\| F_x \| = \| x \|$ என நிறுவவேண்டும். இதற்காக

$$\begin{aligned} \| F_x \| &= \sup \{ | F_x(f) | : \| f \| \leq 1 \} \\ &= \sup \{ | f(x) | : \| f \| \leq 1 \} \\ &\leq \sup \{ \| f \| \| x \| : \| f \| \leq 1 \} \\ &\leq \| x \| \end{aligned}$$

எனவே $\| F_x \| \leq \| x \|$

மேலும் $x \in N$ எனில் அதற்குத் தகுந்தாற் போல் $f \in N^*$ என்ற சார்பு $f(x) = \| x \|, \| f \| = 1$ என இருக்கும்.

எனவே
$$\begin{aligned} \| x \| &= f(x) \\ &\leq | f(x) | \\ &= | F_x(f) | \\ &\leq \sup \{ | F_x(f) | : \| f \| \leq 1 \} \\ &= \| F_x \| \end{aligned}$$

அதாவது $\| x \| \leq \| F_x \|$

இவற்றிலிருந்து $\| F_x \| = \| x \|$, $x \in N$ எனக்கிடைக்கிறது. அடுத்ததாகச் சார்பு J ஒரு நேரியல் உருமாற்றம் என நிறுவ வேண்டும். இதற்கு முன்னதாக,

$$\begin{aligned} F_{x+y}(f) &= f(x+y) \\ &= f(x)+f(y) \\ &= F_x(f)+F_y(f) \\ &= (F_x+F_y)(f) \end{aligned}$$

அதாவது $F_{x+y} = F_x + F_y$

இதே போல $F_{\alpha x}(f) = f(\alpha x)$

$= \alpha f(x)$

$= \alpha F_x(f)$

அதாவது $F_{\alpha x} = \alpha F_x$ ஆகும். இவற்றிலிருந்து

$$J(\alpha x + \beta y) = F_{\alpha x + \beta y}$$
$$= \alpha F_x + \beta F_y$$
$$= \alpha J(x) + \beta J(y)$$

எனவே J என்பது நேரியல் உருமாற்றமாகும்.

மேலும் $x, y \in N$ எனில், $\| J(x) - J(y) \| = \| F_x - F_y \| = \| F_{x-y} \| = \| x-y \|$. இவற்றிலிருந்து J என்பது சமயாப்புள்ளது என்பது தெளிவாகிறது. எனவே J என்ற நேரியல் உருமாற்றம் N^{**}-ல் N-ன் பதித்தல் ஆகும்.

மேலே உள்ள தேற்றத்தின்படி $N \subset N^{**}$. சில வெளிகளுக்கு $N = N^{**}$ என இருக்கும். இவற்றிலிருந்து N என்ற நேரியல் வெளி $N = N^{**}$ என்ற கட்டுப்பாட்டை நிறைவு செய்யுமானால் அந்த வெளி **தற்சுட்டு வெளி** (Reflexive Space) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு:1

l_p என்பது தற்சுட்டு வெளி. ஏனெனில் $l_p^* = l_q$, $l_p^{**} = (l_q)^* = l_p$, இங்கு

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

எடுத்துக்காட்டு:2

l_p^n, $1 \le p < \alpha$ என்ற வெளிகள் தற்சுட்டு வெளிகள் ஆகும். ஏனெனில், $(l_p^n)^* = l_q^n$, $(l_q^n)^* = l_p^n$ எனவே இங்கு $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

11. திறந்த சார்பிடல் தேற்றம்

இந்தப் பகுதியில் திறந்த சார்பிடல் தேற்றம் நிறுவப்படுகிறது. அதற்குத் தேவையான துணைத் தேற்றம் முதலில் நிறுவப்படுகிறது.

துணைத் தேற்றம் 11.1

B மற்றும் B^1 என்பன பானக் வெளிகள், T என்பது B-லிருந்து B^1-க்கு வரையப்படும் மேல் கோர்த்தல், தொடர்ச்சியான நேரியல் உருமாற்றம் எனில், B-ல் உள்ள ஆதிப்புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட திறந்த கோளத்தின் நிழல், B^1-ல் உள்ள ஆதிப்புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட திறந்த கோளத்தினை உள்ளடக்கியிருக்கும்.

நிறுவல்: S_r, S_r' என்பன முறையே B, B′ உள்ள ஆதிப்புள்ளியை மையமாகவும், r ஆரமாகவுமுடைய திறந்த கோளங்கள் என்க. மேலும் $T(S_r) = T(rS_1) = rT(S_1)$ என எளிதில் நிறுவலாம். எனவே $T(S_1)$ என்ற கணம் S'_r என்ற திறந்த கணத்தை உள்ளடக்கியிருக்கிறது என நிறுவினால் போதுமானதாகும்.

இதற்காக, $\overline{T(S_1)}$ என்ற கணம் S'_r-ஐ உள்ளடக்கியிருக்கிறது என நிறுவத் தொடங்குவோம். T -மேல் கோர்த்தல் என்பதால் $B' = \bigcup_1^{\infty} T(S_n)$ என எடுத்துக்கொள்ளலாம். B′- முழு வெளியாதலால், பேயர் தேற்றத்தின்படி ஏதாவது ஒரு கணம் $\overline{T(S_{n_0})}$, y_o என்ற அகப்புள்ளி (Interior point) யைப் பெற்றிருக்கும். மேலும் இப்புள்ளி $T(S_{n_0})$-ல் இருக்கும் எனவும் எடுத்துக்கொள்வோம். $y \to y - y_o$ என்ற சார்பு B-லிருந்து B^1-க்கு ஓர் வடிவொப்புமைச் சார்பு, எனவே $\overline{T(S_{n_0})} - y_o$ என்ற கணம் ஆதிப்புள்ளியை அகப்புள்ளியாகப் பெற்றிருக்கும். y_o என்பது $T(S_{n_0})$- ல் உள்ளதால் $T(S_{n_0}) - y_o \subset T(S_{2n_0})$ ஆகும்.

இவற்றிலிருந்து $\overline{T(S_{n_0})} - y_o = \overline{T(S_{n_0}) - y_0} \subseteq \overline{T(S_{2n_0})}$ என நாம் பெறலாம். இது, $\overline{T(S_{2n_0})}$ என்ற கணம் ஆதிப்புள்ளியை அகப்புள்ளியாகப் பெற்றிருக்கும் என்பதைக் காட்டுகிறது. ஏதாவது ஒரு பூச்சியமில்லா அளவனால் பெருக்குதலும் B′-லிருந்து B′-க்கு வடிவொப்புமைச் சார்பு எனில், $\overline{T(S_{2n_0})} = 2n_0 \overline{T(S_1)}$ ஆகும். இவற்றிலிருந்து ஆதிப்புள்ளியும் $\overline{T(S_1)}$-ன் அகப்புள்ளி ஆகும். எனவே, ஏதாவது ஒரு நேர்ம எண் $\in$-க்கு $S'_\in \subseteq \overline{T(S_1)}$ ஆகும்.

மேலும், $S'_\in \subseteq T(S_3)$ என நிறுவினால், இந்தத் தேற்றம் முடிவுக்கு வரும். இது $S'_{\frac{\in}{3}} \subseteq T(S_1)$-க்குச் சமமானதாகும். $\| y \| < \in$ என்றவாறு உள்ள y என்ற திசையனை B′ - ல் எடுத்துக்கொள்வோம். y என்பது $\overline{T(S_1)}$-ல் உள்ளதால் அதற்குத் தகுந்தவாறு $\| x_1 \| <$ மற்றும் $\| y-y_1 \| < \in/2$ என்ற திசையனை B-ல் எடுத்துக்கொள்வோம். இங்கு $y_1 = T(x_1)$. அடுத்ததாக, $S'_{\frac{\in}{2}} \subseteq \overline{T\left(S_{\frac{1}{2}}\right)}$ என்பதை உணர்கிறோம். எனவே அதற்குத் தகுந்தவாறு $\| x_2 \| < \frac{1}{2}$ மற்றும் $\| (y-y_1) - y_2 \| < \in/4$ என்றவாறு உள்ள x_2 என்ற திசையன் B-ல் இருக்கும். இங்கு $y_2 = T(x_2)$. இதே வழியைத் தொடருவோமானால்,

$\| x_n \| < 1/2^{n-1}$ மற்றும் $\| y - (y_1 + y_2 + \ldots + y_n) \| < \in/2^n$ என்றவாறு உள்ள $\{x_n\}$ என்ற தொடர் வரிசை B-லிருந்து பெறலாம். இங்கு $y_n = T(x_n)$

$S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ என எடுத்துக்கொள்வோமானால் $\|x_n\| < 1/2^{n-1}$ என்ற முடிவிலிருந்து $\{x_n\}$ என்பது ஒரு காசியின் தொடர் வரிசை எனக் கிடைக்கும்.

மேலும் $$\| S_n \| \le \| x_1 \| + \| x_2 \| + \ldots + \| x_n \|$$
$$< 1 + 1/2 + \ldots + 1/2^{n-1}$$
$$< 2$$

B ஒரு முழுவெளி, எனவே $S_n \to x$ என்றவாறு உள்ள x என்ற திசையன் B-ல் இருக்கும் மேலும் $\| x \| = \| \lim S_n \| = \lim \| S_n \| \le 2 < 3$ என்ற முடிவிலிருந்து x என்பது S_3- ல் இருக்கும் எனக் காண முடிகிறது.

$$T(x) = T(\lim S_n) = \lim T(S_n)$$
$$= \lim (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$$
$$= y$$

இவற்றிலிருந்து $T(S_3)$ - ல் y இருக்கும் என்பது தெளிவாகிறது. எனவே $S'_\in \subseteq T(S_3)$.

தேற்றம் (திறந்த சார்பிடல் தேற்றம்) 11.2

B, B′ என்பன பானக் வெளிகள் மற்றும் T என்ற மேல்சார்பு B-லிருந்து B′-க்கு மேல் தொடர்ச்சியான நேரியல் உருமாற்றம் எனில், T என்பது திறந்த சார்பிடல் ஆகும்.

நிறுவல்: T திறந்த சார்பிடல் என நிறுவுவதற்குப் பதிலாக, G என்பது B-ல் திறந்த கணம் எனில் T (G) என்பது B′-ல் திறந்த கணம் என நிறுவினால் போதுமானதாகும். இதற்றாக T (G)- ல், y என்பது ஓர் புள்ளி எனில், y-ஐ மையமாகக் கொண்ட திறந்த கணம் T(G)-னுள் அடங்கியிருக்கும் என நிறுவினால் போதுமானதாகும். x என்பது G-ல் ஒரு புள்ளி T (x) = y என்றவாறு இருக்கும். இங்கு G என்பது ஒரு திறந்த கணம், எனவே x- ஐ மையமாகவும், r ஆரமாகவும் உடைய $x + S_r$ என்ற திறந்த கணம் G-ல் உள்ளடங்கி இருக்கும். நமது துணைத் தேற்றத்தின்படி

$$S'_r \subseteq T(S_r) \Rightarrow y + S'_r \subseteq y + T(S_r) = T(x) + T(S_r)$$
$$\Rightarrow y + S'_r \subseteq T(x + S_r) \subseteq T(G)$$
$$\Rightarrow y + S'_r \subseteq T(G)$$

இத்துடன் நிறுவல் முடிவுறுகிறது.

திறந்த சார்பிடல் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தேற்றத்தை மிக எளிதில் நிறுவலாம்.

தேற்றம் 11.3

ஒரு பானக் வெளியிலிருந்து மற்றொரு பானக் வெளிக்கு வரையப்படும் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடைய தொடர்ச்சியான நேரியல் உருமாற்றம் ஒரு வடிவொப்புமைச் (Homeomorphism) சார்பு ஆகும்.

இந்தத் தேற்றத்தின் முதல் பயன்பாடு, பானக் வெளியின் மீது வரையறை செய்யப்படும் வீழல் (Projection)-இன் தன்மைகளைக் காண்பதேயாகும். L என்ற நேரியல் வெளியில் வரையறை செய்யப்படும் E என்ற நேரியல் சார்பு $E^2 = E$ எனும் போது வீழல் எனப்படும். L ன் மீது வரையறை செய்யப்படும் வீழல் E- ஐ கீழ்க்கண்டவாறு வடிவயியல் வாயிலாக விவரிக்கலாம்.

1. வீழல் E என்பது $L = M \oplus N$ என்றவாறு உள்ள M, N என்று இரண்டு L-ன் உள்வெளிகளைக் காண்பதேயாகும். இங்கு $M = \{ E(x) : x \in L\}$ மற்றும் $N = \{ x \in L : E(x) = 0\}$ முறையே, E-ன் வீச்சு மற்றும் வெற்றிட வெளி ஆகும்.

2. $L = M \oplus N$ என்றவாறு உள்ள M,N என்ற இரண்டு உள்வெளிகளைப் பயன்படுத்தி E என்ற வீழலை கண்டறிவதேயாகும். (இங்கு $z = x+y$ என்றவாறு L-ல் உள்ள ஒவ்வொரு திசையினையும் ஒரே வழியில் எழுதமுடியுமெனில் $E(z) = x$ என்றவாறு உள்ள வீழல் E-ஐ வரையறை செய்யலாம்.)

இந்த உண்மைகள், L-ன் மீது வீழல்களைப் பற்றிப் படிப்பதும் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பில்லாத, L-ஐ உருவாக்கக் கூடிய இரண்டு உள்வெளிகளைப் பற்றிப் படிப்பதும் ஒன்றே என்பதை உணர்த்துகின்றன. மேலும் பானக் வெளிக் கோட்பாடுகளில் நேரியல் மற்றும் தன்னடுக்கு (Idempotent) ஆகியவற்றைவிட வீழல் அதிகமாக பயன்படுகிறது.

தேற்றம்: 11.4

P என்பது B என்ற பானக் வெளி மீது வீழல் மற்றும் M, N என்பன முறையே அதன் வீச்சு மற்றும் வெற்று வெளிகள் எனில் M, N என்பன $B = M \oplus N$ என்றவாறு உள்ள B-ன் மூடிய உள்வெளிகள்.

நிறுவல்: இங்கு P என்பது E- ன் மீது வீழல், எனவே (1)- ன் படி M, N என்பன மூடிய உள்வெளிகள் என நிறுவினால் போதுமானதாகும். ஏதாவது ஒரு தொடர்ச்சியான நேரியல் உருமாற்றத்தின் வெற்றிட வெளி மூடிய உள்வெளி. எனவே N என்பது மூடிய உள்வெளி. $M = \{P(x) : x \in B\} = \{x : P(x) = x\} = \{(I-P)x = 0\}$ இவற்றிலிருந்து M என்பது I-P யின் வெற்றிட வெளி என்பது தெளிவாகிறது. எனவே M ஒரு மூடிய உள்வெளி ஆகும்.

தேற்றம் 11.5

B என்பது பானக் வெளி என்க. M, N என்பன $B = M \oplus N$ என்றவாறு உள்ள B-ன் மூடிய உள்வெளிகள் என்க. $z = x + y, x \in M, y \in N$, என B- ல் உள்ள ஒவ்வொரு z-ஐயும் ஒரே வழியில் எழுதமுடியுமெனில், B-ன் மீது $P(z) = x$ என்றவாறு வரையறை செய்யப்படும் சார்பு P ஒரு வீழலாகும், இதன் வீச்சு மற்றும் வெற்றிட வெளிகள் முறையே M, N ஆகும்.

நிறுவல்: P தொடர்ச்சியானது என்பதைத் தவிர, (2) லிருந்து தேற்றத்தில் கூறியது அனைத்தும் தெளிவாகிறது. B என்ற நேரியல் வெளியில் $\| z \|' = \| x \| + \| y \|$ என்ற வேறொரு அலகை வரையறை செய்யும்போது B′ என்ற பேனக் வெளி கிடைக்கின்றது. மேலும்

$\| P(z) \| = \| x \| \leq \| x \| + \| y \| = \| z \|'$ இவற்றிலிருந்து P என்பது B′லிருந்து B-க்கு தொடர்ச்சியானது, எனவே B, B′ என்பன ஒரே திணையியலைப் பெற்றிருக்கும் என நிறுவினால் போதுமானதாகும். I என்பது B′ லிருந்து B-க்கு முற்றொருமை (Identity) சார்பு எனில், $\| I(z) \| = \| z \| = \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \| = \| z \|'$ ஆகும். இவற்றிலிருந்து I என்பது தொடர்ச்சியான ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடைய நேரியல் உருமாற்றம் என்பதை உணரமுடிகிறது.

எனவே தேற்றம் 11.3-ன் படி I – என்பது வடிவொப்புமைச் சார்பு ஆகும். ஆதலால் B மற்றும் B′ ஒரே திணையியல் வெளி ஆகும்.

T என்பது B- லிருந்து B′-க்கு நேரியல் உருமாற்றம். T-ன் **வரைபு** (Graph) என்பது $B \times B'$- ன் உள்வெளி ஆகும். இதன் உறுப்புகள் அனைத்தும் (x, T(x)) என்ற அமைப்பில் இருக்கும்.

தேற்றம் 11.6 (மூடிய வரைபுத் தேற்றம்)

B மற்றும் B′ என்பன பேனக் வெளிகள், மற்றும் T என்பது B லிருந்து B′க்கு நேரியல் உருமாற்றம் எனில், T தொடர்ச்சியானதாக அமைய தேவையான போதுமான கட்டுப்பாடு இதன் வரைபு மூடியதாகும்.

நிறுவல்: T தொடர்ச்சியானது என எடுத்துக்கொள்வோம். இதன் வரைபு $G = \{ (x, T(x)) : x \in B \}$ மூடியது என நிறுவ வேண்டும். $(x_n, T(x_n))$ என்ற தொடர் வரிசை (x,y)-ல் குவிகிறது என்க. இங்கு T தொடர்ச்சியானது. எனவே $x_n \to x$ எனும் போது $T(x_n) \to T(x)$ ஆகும். இவற்றிலிருந்து $n \to \infty$ எனும் போது $(x_n, T(x_n)) \to (x, T(x))$. எனவே $y = T(x)$. இதன் படி $(x, T(x)) \in G$ ஆதலால் G மூடிய கணம் ஆகும்.

மறுதலையாக, G- என்பது $B \times B'$- ல் மூடிய கணம் என்க. T- தொடர்ச்சியானது என நிறுவ வேண்டும். நேரியல் வெளி B-ன் மீது $\| x \|_1 = \| x \| + \| T(x) \|$ என்ற புதிய அலகை வரையறை செய்வோம். இந்த அலகையின்படி B_1 என்பது புதிய அலகை நேரியல் வெளி ஆகும்.

இங்கு $\| T(x) \| \leq \| x \| + \| T(x) \| = \| x \|_1$ இவற்றிலிருந்து T என்ற சார்பு B_1 லிருந்து B'- க்கு தொடர்ச்சியானதாகும். எனவே B மற்றும் B_1 ஒரே திணையியல் உடையது என நிறுவினால் போதுமானதாகும். B_1- லிருந்து B- க்கு வரையறை செய்யப்படும் முற்றொருமை சார்பு I- ஆனது

$$\| I(x) \| = \| x \| \leq \| x \| + \| T(x) \| = \| x \|_1,$$

என்பதால் I- தொடர்ச்சியானதாகும். எனவே B_1 வெளி, முழுவெளி என நிறுவினால் தேற்றம் 11.3-ன் படி I –ஒரு வடிவொப்புமைச் சார்பாகும் . ஆகவே B_1, B ஒரே திணையியல் உடையவையாகும். $\{x_n\}$ என்பது B_1-ல் காசி வரிசைத்தொடர் என்க எனவே $\{x_n\}$ மற்றும் $\{T(x_n)\}$ என்பன முறையே B, B'- ல் காசி வரிசைத்தொடர்கள் ஆகும். இங்கு B, B'முழு வெளிகள், ஆதலால் அதற்குத் தகுந்தாற்போல் $\|x_n - x\| \to 0$, $\| T(x_n) - y \| \to 0$ என்றவாறு $x \in B$, $y \in B'$- இருக்கும். வரைபு T என்பது $B \times B'$– மூடியது என்ற நமது கருதுகோளின்படி (x,y) என்பது வரைபு G- ல் இருக்கும். அதாவது $T(x) = y$. இப்போது $\| x_n - x \|_1 = \| x_n - x \| + \| T(x_n) - T(x) \| = \| x_n - x \| + \| T(x_n) - y \| \to 0$. எனவே $\|x_n - x\|_1 \to 0$ ஆதலால் $\{x_n\}$ என்ற காசி வரிசைத்தொடர் B_1 –ல் x என்ற புள்ளியில் குவிகிறது. இவற்றிலிருந்து B_1 ஒரு முழு வெளி ஆகும்.

12. செயலியின் இணைச் செயலி (Conjugate of an operator)

இந்தப் பகுதியில், N என்ற அலகை நேரியல் வெளியின் மீது வரையறை செய்யப்படும் ஒவ்வொரு T என்ற செயலியும் அதற்குத் தகுந்தாற் போல் இணை வெளி N* மீது T* என்ற நேரியல் உருமாற்றத்தை உருவாக்குகிறது என்பதைப் பற்றிக் காணலாம். இங்கு T* என்பது T-ன் **இணைச்செயலி** எனப்படும்.

தேற்றம் 12.1 (சீரான வரம்புறு தேற்றம்)

B என்பது பானக் வெளி, N என்பது அலகை நேரியல் வெளி என்க. $\{T_i\}$ என்பது B- லிருந்து N-க்கு வரையறை செய்யப்படும் அனைத்து நேரியல் உருமாற்றங்களின் வெற்றற்ற கணம் என்க. இது B-ல் உள்ள ஒவ்வொரு x-க்கும் $\{T_i(x)\}$என்ற கணம் N-ல் எல்லைக்குட்பட்டது என்ற தன்மையுடையதெனில் $\{\|T_i\|\}$ என்பது எல்லலக்குட்பட்ட எண்களின் கணம் ஆகும். அதாவது $\{T_i\}$ என்பது $\mathscr{B}$(B,N)-ல் எல்லைக்குட்பட்டதாகும்.

நிறுவல்: ஒவ்வொரு நேர்ம முழு எண் n-க்கு $F_n = \{x: x \in B \text{ and } \| T_i(x) \| \leq n$, i- ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும்$\}$ என்ற கணம் B-ன் மூடிய உட்கணம் என்பது

தெளிவாகிறது. மேலும் நமது ஊகத்தின் படி $B=\bigcup_{1}^{\infty}F_n$. இங்கு B முழு வெளி, எனவே பேயர் (Baire's) தேற்றத்தின் படி ஏதாவது ஒரு F_n வெற்றற்ற அகப்புள்ளியுடையதாக இருக்கும். இதனை F_{n_0} என எடுத்துக்கொள்வோம். எனவே F_{n_0}-ல் உள்ள அகப்புள்ளி x_0- ஐ மையமாகவும், $r_0 > 0$ ஆரமாகவுமுடைய S_0 என்ற மூடிய கோளம் F_{n_0}-ல் உள்ளடங்கியிருக்கும். இதன்படி ஒவ்வொரு கணம் $T_i(s_0)$-ல் உள்ள ஒவ்வொரு திசையின் அலகை, n_0 விட குறைவாக அல்லது சமமாக இருக்கும். அதாவது $\|T_i(s_0)\| \le n_0$. மேலும் S_0-x_0 என்பது r_0 ஆரமாகவும் ஆதிப்புள்ளியை மையமாகவுடைய மூடிய கோளம். எனவே $\frac{S_0 - x_0}{r_0}$ என்பது ஆதிப்புள்ளியை மையமாகவும், ஒரு அலகு ஆரமாகவும் உடைய கோளம். இங்கு x_0 என்பது S_0-ல் உள்ளது. எனவே $\|T_i(S_0\text{-}x_0)\| \le 2n_0$. இவற்றிலிருந்து $\| T_i(S) \| \le \frac{2n_0}{r_0}$. ஆதலால் ஒவ்வொரு i-க்கும் $\| T_i \| \le \frac{2n_0}{r_0}$ எனவே $\{T_i\}$ எல்லைக்குட்பட்ட கணம் ஆகும்.

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தேற்றத்தை பானக்–ஸ்டெயின் ஹாஸ் தேற்றம் (Branch-Steinhaus Theorem) எனவும் அழைக்கலாம்.

தேற்றம் 12.2

N- என்ற அலகை நேரியல் வெளியின் வெற்றற்ற உட்கணம் X வரம்புடையதாக அமைய தேவையான மற்றும் போதுமான கட்டுப்பாடு N*-ல் உள்ள ஒவ்வொரு f-க்கும் f(X) என்பது வரம்புடைய எண்களின் கணமாகும்.

நிறுவல்: $X = \{x_i\}$ என்பது N-ன் உட்கணம் என எடுத்துக்கொள்வோம் எனில், $\{ F_{x_i} \}$ என்பது N**- ல் X-ன் இயல் பதித்தல் ஆகும். இங்கு f(X) என்பது எல்லைக்குட்பட்டது, எனவே $\{f(x_i)\}$-ம் எல்லைக்குட்பட்டதாகும். ஆனால் $\{f(x_i)\}=\{ F_{x_i}(f)\}$ எனவே ஒவ்வொரு f-க்கும் $\{ F_{x_i} \}$ எல்லைக்குட்பட்டதாகும். இங்கு N* ஒரு முழு வெளி, எனவே தேற்றம் 12.1-ன் படி $\{ F_{x_i} \}$ என்பது N**-ல் எல்லைக்குட்பட்டதாகும். இவற்றிலிருந்து X என்பது N-ல் எல்லைக்குட்பட்டது என்பது நிறுவப்படுகிறது.

மறுதலையாக $| f(x) | \le \| f \| \| x \|$. இவற்றிலிருந்து X எல்லைக்குட்பட்டது எனும் போது ஒவ்வொரு f- க்கும் f (X)- ம் எல்லைக்குட்பட்டதாகும்.

T என்பது N- என்ற அலகை நேரியல் வெளியின் மீது வரையறை செய்யப்படும் செயலி எனில் N*-ன் மீது T* என்ற செயலி $[T^*(f)]\ (x) = f\ (T(x))$ என வரையறை செய்யலாம்.

தேற்றம்: 12.3

N என்ற அலகை நேரியல் வெளியின் மீது T என்பது செயலி எனில் N* மீது வரையறை செய்யப்படும் $[T^*(f)](x) = f(T(x))$ என்ற சார்பு T* ஒரு செயலி ஆகும். மேலும் $T \rightarrow T^*$ என்ற சார்பு சமயாப்புள்ள சம ஒப்புமைச் சார்பு ஆகும்.

நிறுவல்: முதலில் T* என்பது நேரியல் உருமாற்றம் என நிறுவவேண்டும். α, β என்பது அளவன், $f, g \in N^*$ எனில் $[T^*(\alpha f + \beta g)]\ (x) = (\alpha f + \beta g)]\ (T(x))$

$$= (\alpha f)\ T(x) + (\beta g)]\ T(x)$$
$$= \alpha\ [f(T(x))] + \beta[g\ T(x)]$$
$$= \alpha\ [T^*(f)](x) + \beta[T^*(g)]\ (x)$$
$$= [\alpha T^*(f) + \beta T^*(g)]\ (x)$$

அதாவது $T^*(\alpha f + \beta g) = \alpha\ T^*(f) + \beta T^*(g)$ எனவே T* என்பது ஒரு நேரியல் உருமாற்றமாகும்

மேலும் $\| T^* \| = \text{Sup}\ \{ \| T^*(f) \| : \| f \| \le 1\}$

$$= \text{Sup}\ \{ \| [T^*(f)]\ (x) \| : \| f \| \le 1, \| x \| \le 1\}$$
$$= \text{Sup}\ \{ \| f(T(x)) \| : \| f \| \le 1, \| x \| \le 1\}$$
$$\le \text{Sup}\ \{ \| f \|\ \| T \|\ \| x \| : \| f \| \le 1, \| x \| \le 1\}$$
$$\le \|T\|$$

அதாவது $\| T^* \| \le \| T \|$ எனவே T* என்பது எல்லைக்குட்பட்டதாகும். இவற்றிலிருந்து T* என்பது N* மீது ஒரு செயலி ஆகும்.

மேலும், தேற்றம் 10.3-ன் படி, N-ல் உள்ள பூச்சியமல்லாத உறுப்பு x-க்கும் அதற்கு தகுந்தாற்போல் $\| f \| = 1$, $f(T(x)) = \|\ T(x) \|$ என்றவாறு f என்ற செயலி N*-ல் இருக்கும். எனவே

$$\| T \| = \text{Sup}\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \ne 0\right\}$$

$$= \text{Sup}\left\{\frac{\|f(T(x))\|}{\|x\|} : x \ne 0, \|f\| = 1\right\}$$

$$= \text{Sup}\left\{\frac{\|T^*(f(x))\|}{\|x\|} : x \ne 0, \|f\| = 1\right\}$$

$$\le \text{Sup}\ \{ \| T^* \|\ \| f \| : \| f \| = 1\}$$

அதாவது $\| T \| \leq \| T^* \|$. இவற்றிலிருந்து $\| T \| = \| T^* \|$ எனப்பெறலாம்

இறுதியாக $T \to T^*$ என்று வரையறை செய்யப்படும் $\phi : \mathcal{B}(N) \to \mathcal{B}(N^*)$ என்ற சார்பு சமயாப்புள்ள சம ஒப்புமைச் சார்பு என நிறுவ வேண்டும்.

இங்கு $\phi(T) = T^* \Rightarrow \| \phi(T) \| = \| T^* \| = \| T \|$

அதாவது $\| \phi(T) \| = \| T \|$

அடுத்ததாக $\phi(\alpha T_1 + \beta T_2) = \alpha \phi(T_1) + \beta \phi(T_2)$ என நிறுவ வேண்டும். அதற்காக முதலில் $(\alpha T_1 + \beta T_2)^* = \alpha T_1^* + \beta T_2^*$ என நிறுவ வேண்டும்.

$$\begin{aligned}[(\alpha T_1 + \beta T_2)^* f](x) &= f[(\alpha T_1 + \beta T_2)(x)] \\ &= f(\alpha T_1 x) + f(\beta T_2 x) \\ &= \alpha f[T_1(x)] + \beta f[T_2(x)] \\ &= [\alpha T_1^*(f) + \beta T_2^*(f)](x)\end{aligned}$$

அதாவது $(\alpha T_1 + \beta T_2)^* f = (\alpha T_1^* + \beta T_2^*)(f)$

அதாவது $(\alpha T_1 + \beta T_2)^* = \alpha T_1^* + \beta T_2^*$

எனவே
$$\begin{aligned}\phi(\alpha T_1 + \beta T_2) &= (\alpha T_1 + \beta T_2)^* \\ &= \alpha T_1^* + \beta T_2^* \\ &= \alpha \phi(T_1) + \beta \phi(T_2)\end{aligned}$$

இவற்றிலிருந்து ϕ என்பது சமயாப்புள்ள சமஒப்புமைச் சார்பு என்பது தெளிவாகிறது.

தேற்றம் 12.4

$T_1, T_2 \in \mathcal{B}(N)$ எனில், $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$ ஆகும்.

நிறுவல்: வரையறைப்படி
$$\begin{aligned}[(T_1 T_2)^*(f)](x) &= f[(T_1 T_2) x] \\ &= f[T_1(T_2(x))] \\ &= T_1^*[(f)(T_2(x)] \\ &= [T_2^* T_1^*(f)](x)\end{aligned}$$

எனவே, $(T_1 T_2)^*(f) = (T_2^* T_1^*) f$

அதாவது $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$.

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. B என்பது பானக் வெளி, N என்பது அலகை நேரியல் வெளி என்க. B-ல் உள்ள ஒவ்வொரு x-க்கும் $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = T(x)$ என்றவாறு $\{T_n\}$ என்ற தொடர்வரிசை $\mathcal{B}$ (B,N)-ல் உள்ளது எனில், T என்பது தொடர்ச்சியான நேரியல் உருமாற்றம் ஆகும்.

2. B-என்பது பானக் வெளி எனில், B தற்சுட்டு $\Leftrightarrow B^*$ தற்சுட்டு என நிறுவுக.

3. N, N^1 என்பன அலகை நேரியல் வெளிகள். $T : N \to N^1$ என்பது மூடிய நேரியல் உருமாற்றம் $T^{-1} = N^1 \to N$ என்ற சார்பு இருக்குமாயின், அது மூடிய நேரியல் உருமாற்றம் என நிறுவுக.

பகுதி - 3

ஹில்பர்ட் வெளிகள்
(Hilbert Spaces)

இந்தப் பகுதியில் ஹில்பர்ட் வெளியின் அடிப்படைத் தன்மைகளைப் பற்றிக் காணலாம். அடுத்துவரும் பிரிவுகளில் ஹில்பர்ட் வெளி என்பது பானக் வெளியின் ஒரு பிரத்தியேக வகை என்பதையும் இரண்டு திசையன்கள் எப்போது செங்குத்தானவையாக இருக்கும் என்பது பற்றியும் விவரிக்கப்பட்டுள்ளது.

13. வரையறை மற்றும் சில தன்மைகள்

முந்தைய பகுதியில், பானக் வெளியைப் பற்றிப் படித்தோம். அதில் நேரியல் வெளியை விட சற்றுக் கூடுதலாகத் திசையனில் நீளமாகிய அலகையையும் சேர்த்துப் படித்தோம். முக்கியமாக, இரண்டு திசையன்களுக்கு இடையே உள்ள கோணங்களைப் பற்றி ஏதும் சொல்லப்படவில்லை எனினும், இரண்டு செங்குத்துத் திசையன்கள் பற்றி ஹில்பர்ட் வெளியில் சொல்லப்படுகிறது. இந்தக் கோட்பாடுகளை, முப்பரிமாண யூக்ளிடு வெளிலிருந்து தொடங்குவோம். $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ என்ற திசையனின் அலகையை $\|x\| = \left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ என வரையறை செய்யலாம். திசைய அறமத்தில் $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ என்ற இரண்டு திசையன்களின் உள்பெருக்கல் $(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ என வரையறை செய்யலாம். இந்த உள்பெருக்கலை அலகையுடன் $(x,x) = \|x\|^2$ என தொடர்புடையதாக்கலாம். படிப்பவர்களுக்கு $(x,y) = \|x\| \|y\| \cos\theta$ என்ற சமன்பாடு மிகவும் அறிமுகமானதாகும். இங்கு θ என்பது x,y ஆகிய திசையன்களுக்கிடையே உள்ள கோணம் ஆகும்.

x,y செங்குத்துத் திசையன்கள் எனில் $(x,y) = 0$. இதனை $x \perp y$ என குறிப்பிடலாம். இந்தக் கருத்துக்களை பயன்படுத்தி முப்பரிமான யூக்ளிடு வெளியில்

$$(x, y) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + x_3\overline{y_3} \qquad (1)$$

என உள்பெருக்கலை வரையறை செய்யலாம். இங்கு மெய்புனை இணையிய எண்களைப் பயன்படுத்தினாலும் $(x,x) = \|x\|^2$ –ல் எந்த மாற்றமும் இல்லை. இந்தக் கருத்துக்களை அடிப்படையாகக் கொண்டு ஹில்பர்ட் வெளியை வரையறை செய்யலாம்.

ஹில்பர்ட் வெளி என்பது மெய்புனை பேனக் வெளி (Complex Banach Space) ஆகும். இதன் அலகை உள் பெருக்கலிலிருந்து உருவாக்கப்படுகின்றது.

X என்பது C என்ற மெய்புனை எண்ணைப் பொறுத்து நேரியல் வெளி, X-ன் மீது வரையறை செய்யப்படும் உள்பெருக்கல் ( ) கீழ்கண்ட கட்டுப்பாடுகளை நிறைவு செய்யும்.

1. $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha (x,z) + \beta (y,z)$
2. $(x,y) = \overline{(y,x)}$
3. $(x,x) = \| x \|^2$

1, 2 ஆகிய கட்டுப்பாடுகளிலிருந்து $(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}\ (x,y) + \overline{\beta}\ (x,z)$ என்ற முடிவையும் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு:1.

l_2^n என்ற வெளி உள்பெருக்கல் வெளி இதில் வரையறுக்கப்படும் உள்பெருக்கல் $(x,y) = \sum_1^n x_i \overline{y_i}$. இங்கு $x = (x_1,x_2. . .x_n)$ மற்றும் $y_n = (y_1, y_2, . . . y_n)$

எடுத்துக்காட்டு:2

l_2 என்ற வெளியில் வரையறுக்கப்படும் உள் பெருக்கல் $(x,y) = \sum_1^\infty x_i \overline{y_i}$. இங்கு $x = (x_1, x_2. . . .)$ மற்றும் $y = (y_1,y_2,y_3. . . . .)$. எனவே l_2 ஒரு உள்பெருக்கல் வெளி.

எடுத்துக்காட்டு: 3

m அளவுடைய X அளவை வெளி (measurable space) யுடன் இணைந்த வெளி L_2-ல் உள்ள தொகையிடத்தக்க சார்புகள் f,g-ன் உள்பெருக்கல் $(f,g)= \int f(x)\overline{g(x)}dm(x)$ என வரையறுக்கப்படுமானால், L_2 என்பது ஒரு உள்பெருக்கல் வெளி ஆகும்.

தேற்றம் 13:1

(ஸ்குவாட்ஸ் சமனிலி) ஹில்பர்ட் வெளியில் x,y என்பன ஏதேனும் இரண்டு திசையன்கள் எனில், $|(x,y)| \le \| x \| \| y \|$ ஆகும்.

நிறுவல்: y = 0 எனும் போது சமனிலியியில் இருபக்கமும் பூச்சியமாகும். எனவே இந்த முடிவு நிறுவப்படுகின்றது. $y \neq 0$ எனும் போது $\|(y, y/\|y\|)\| \le \|x\|$ என்ற சமனிலி கொடுக்கப்பட்ட சமனிலிக்குச் சமமானதாகும். எனவே நமது நோக்கம் யாவும் $\| y \| = 1$

எனும் போது நிறுவினால் போதுமானதாகும். அதாவது $|(x,y)| \leq \|x\|$ என நிறுவினால் போதுமானதாகும்.

இப்போது $0 \leq \|x - (x, y)y\|^2 = (x - (x, y)y, x - (x, y)y)$

$$= (x,x) - (x,y)\overline{(x,y)} - (x,y)\overline{(x,y)} + (x,y)\overline{(x,y)}(y,y)$$

$$= (x, x) - (x,y)\overline{(x,y)}$$

$$= \|x\|^2 - |(x,y)|^2$$

எனவே $|(x, y)| \leq \|x\|$

தேற்றம் 13.2

ஹில்பர்ட் வெளியில் உள் பெருக்கல் இணைந்த தொடர்ச்சியானதாகும்.

நிறுவல்: உள்பெருக்கல் தொடர்ச்சியானது என நிறுவுவதற்குப் பதிலாக $x_n \to x$ மற்றும் $y_n \to y$ எனும் போது $(x_n,y_n) \to (x,y)$ என நிறுவினால் போதுமானதாகும் இதற்காக

$$|(x_n,y_n) - (x,y)| = |(x_n,y_n) - (x_n,y) + (x_n,y) - (x,y)|$$

$$\leq |(x_n,y_n) - (x_n,y)| + |(x_n,y) - (x,y)|$$

$$= |(x_n,y_n - y)| + |(x_n - x,y)|$$

$$\leq \|x_n\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\| \quad - (1)$$

இங்கு $x_n \to x$, $y_n \to y$, எனவே $\|x_n - x\| \to 0$ மற்றும் $\|y_n - y\| \to 0$ மேலும் $\{x_n\}$ என்பது குவியும் தொடர் வரிசை. எனவே n-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் $\|x_n\| \leq M$ இவற்றிலிருந்து சமனிலி (1) -ன் வலதுபுறம் $n \to \infty$ எனும்போது பூச்சியத்தை நெருங்கும். எனவே இடதுபுறமும் பூச்சியத்தை நெருங்கும். அதாவது $n \to \infty$ எனும்போது $(x_n,y_n) \to (x,y)$ ஆகும்.

அடிப்படை வடிவியலில், இணைகர விதி என்பது இணைகரத்தின் பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் அதன் மூலைவிட்டங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குச் சமமாகும். நாம் இப்போது, ஹில்பர்ட் வெளில் உள்ள அலகை, இந்த முக்கியமான இணைகர விதியை நிறைவு செய்கிறது என்பதைக் காணலாம்.

தேற்றம் 13.3

x, y என்பது ஒரு ஹில்பர்ட் வெளியின் ஏதேனும் இரண்டு திசையன்கள் எனில் $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ ஆகும்.

நிறுவல்: x, y என்பன ஹில்பர்ட் வெளி H-ல் உள்ள திசையன்கள் என்க.

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y)$$

$$= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y)$$

$$= \|x\|^2 + (x, y) - (y, x) + \|y\|^2 \quad - (2)$$

$$\|x - y\|^2 = (x - y, x - y)$$

$$= (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y,y)$$

$$\|x\|^2 - (x,y) + (y,x) + \|y\|^2 \qquad (3)$$

சமன்பாடு (2) (3) ஆகியவற்றிலிருந்து

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \qquad (4)$$

இந்த இணைகர விதியைப் பயன்படுத்திக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தேற்றத்தினை நிறுவலாம்.

தேற்றம் 13.4

C என்பது H என்ற ஹில்பர்ட் வெளியின் மூடிய குவி உட்கணம் (Closed Convex Subset) எனில் C- னுள் மிகக் குறைந்த அலகை உடைய ஒரே ஒரு திசையன் மட்டும் இருக்கும்.

நிறுவல்: இங்கு C என்பது குவிக் கணம் (Convex set) எனவே x, y என்ற திசையன்கள் C- ல் இருக்கும் போது $\frac{x+y}{2}$ ம் C-ல் இருக்கும். $d = \inf\{\|x_n\| : x \in C\}$ என்க. எனவே $\|x_n\| \to d$ என்றவாறு உள்ள $\{x_n\}$ என்ற தொடர் வரிசை C-ல் இருக்கும். C-ன் குவிதன்மையின்படி $\frac{x_m + x_n}{2}$ ம் C-ல் இருக்கும். எனவே $\left\|\frac{x_m + x_n}{2}\right\| \geq d$. அதாவது $\|x_m + x_n\| \geq 2d$. இணைகர விதியின் படி

$$\|x_m - x_n\|^2 = 2\|x_m\|^2 + 2\|x_n\|^2 - \|x_m + x_n\|^2$$

$$\leq 2\|x_m\|^2 + 2\|x_n\|^2 - 4d^2$$

$n \to \infty$ எனும் போது சமனிலியின் வலதுபுறம் பூச்சியத்தை நெருங்கும். எனவே இடதுபுறமும் பூச்சியத்தை நெருங்கும். இவற்றிலிருந்து $\{x_n\}$ என்பது C-ல் ஒரு காசி வரிசைத் தொடர் என்பது தெளிவாகின்றது. இங்கு H என்பது முழுவெளி, C என்பது H-ன் மூடிய உள்வெளி. எனவே C என்பது ஒரு முழுவெளி. ஆதலால் $\{x_n\}$–க்குத் தகுந்தாற் போல் $x_n \to x$ என்றவாறு x என்ற திசையன் C- ல் இருக்கும். $\|x\| = \|\lim_{n\to\infty} x_n\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n\| = d$ என்ற முடிவிலிருந்து C-ல் x என்பது மிகச்சிறிய அலகையுடைய திசையன் என்பது தெளிவாகிறது. இறுதியாக இந்த x- என்பது ஒருமைத் தன்மை வாய்ந்தது என நிறுவ வேண்டும். x- ஐத் தவிர வேறொரு திசையன் x' மிகக் குறைந்த அலகை உடைய திசையன் என எடுத்துக் கொள்வோமானால் $\frac{x+x'}{2}$ என்ற திசையனும் C-ல் இருக்கும். மேலும் $\left\|\frac{x+x'}{2}\right\|^2 = \left\|\frac{x}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x'}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-x'}{2}\right\|^2$

$$< \left\| \frac{x}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x'}{2} \right\|^2 = d^2$$

அதாவது $\| \frac{x + x'}{2} \| < d$. இது d-ன் வரையறைக்கு முரண்பாடாகும். எனவே தேற்றம் நிறுவப்படுகிறது.

துணைத் தேற்றம் 13.5

H என்ற ஹில்பர்ட் வெளியில், x, y என்பது ஏதேனும் இரு திசையன்கள் எனில்
$4 (x, y) = \| x + y \|^2 - \| x - y \|^2 + i \| x + iy \|^2 - i \| x - iy \|^2$ ஆகும்

நிறுவல்: $\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + (x, y) + (y, x) + \| y \|^2$ மற்றும்

$\| x - y \|^2 = \| x^2 \| - (x, y) - (y, x) + \| y \|^2$

எனவே $\| x + y \|^2 - \| x - y \|^2 = 2 (x, y) + 2 (y, x)$ - (A)

இச்சமன்பாட்டிலிருந்து $\| x + i y \|^2 - \| x - i y \|^2 = 2 (x, iy) + 2 (iy, x)$ என எழுதலாம்.

அதாவது, $\| x + i y \|^2 - \| x - iy \|^2 = -2 i (x, y) + 2i (y, x)$

எனவே, $i \| x + iy \|^2 - i \| x - iy \|^2 = 2 (x, y) - 2 (y, x)$ - (B)

சமன்பாடு A,B ஐக் கூட்ட

$\| x + y \|^2 - \| x - y \|^2 + i \| x + i y \|^2 - i \| x - i y \|^2 = 4 (x, y)$ எனக் கிடைக்கும்.

தேற்றம் : 13.6

B என்ற மெய்புனை பேனக் வெளியின் அலகை

(i) $\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2 (\| x \|^2 + \| y \|^2)$ மற்றும்

(ii) $4 (x, y) = \| x + y \|^2 - \| x-y \|^2 + i \| x + iy \|^2 - i \| x - iy \|^2$ - (5)

ஆகியவற்றுடன் ஒத்துப்போகும் எனில், B ஒரு ஹில்பர்ட் வெளி ஆகும்.

நிறுவல்: B ஹில்பர்ட் வெளி என நிறுவுவதற்கு (5)-ல் வரையறை செய்யப்பட்டுள்ள அலகை, அலகைக்குரிய கட்டுப்பாடுகளை நிறைவு செய்யும் என நிறுவினால் போதுமானதாகும்.

(அ) சமன்பாடு (5)- லிருந்து

$$4(x,x) = \|x+x\|^2 + i\|x+ix\|^2 - i\|x-ix\|^2$$
$$= 4\|x\|^2 + 2i\|x\|^2 - 2i\|x\|^2$$
$$= 4\|x\|^2$$

எனவே $(x, x) = \|x\|^2$

(ஆ) $4(x,y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2$
$$= \|y+x\|^2 - \|y-x\|^2 + i\|y+ix\|^2 - i\|y-ix\|^2$$
$$= 4(y,x)$$

எனவே $(x, y), = (y, x)$

(இ) சமன்பாடு (5)- லிருந்து

$$4(x+y,z) = \|(x+y)+z\|^2 + \|(x+y)-z\|^2 + i\|(x+y)+iz\|^2 - i\|(x+y)-iz\|^2 - \quad (6)$$

சமன்பாடு (4) லிருந்து

$$\|x+z+y\|^2 + \|x+z-y\|^2 = 2(\|x+z\|^2 + \|y\|^2) \quad - \quad (7)$$

அதாவது, $\|x+z+y\|^2 = 2\|x+z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x+z-y\|^2 \quad - \quad (8)$

மீண்டும்

$$\|x+z-y\|^2 = \|(z-y)+x\|^2$$
$$= 2\|z-y\|^2 + 2\|x\|^2 - \|(z-y)-x\|^2$$
$$= 2\|y-z\|^2 + 2\|x\|^2 - \|(y+x)-z\|^2 \quad - \quad (9)$$

சமன்பாடு (8), (9) ஆகியவற்றிலிருந்து

$$|x+y+z\|^2 = 2\|x+z\|^2 + 2\|y\|^2 - [2\|y-z\|^2 + 2\|x\|^2 - \|(y+x)-z\|^2]$$

அதாவது

$$\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 = 2\|x+z\|^2 - 2\|y-z\|^2 + 2\|y\|^2 - 2\|x\|^2 \quad - \quad (10)$$

இந்தச் சமன்பாட்டில் x, y - ஐ இடமாற்றம் செய்யப்படும் போது

$$\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 = 2\|y+z\|^2 - 2\|x-z\|^2 + 2\|x\|^2 - 2\|y\|^2 \quad - \quad (11)$$

எனக் கிடைக்கும்.

சமன்பாடு (10), (11) -ஐக் கூட்ட

$$\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 = \|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2 \quad - \quad (12)$$

சமன்பாடு (12)-ல் z க்குப் பதிலாக zi - ஐப் பிரதியிட

$$\|x+y+iz\|^2 - \|x+y-iz\|^2 = \|x+iz\|^2 - \|x-iz\|^2 + \|y+iz\|^2 - \|y-iz\|^2 \quad - \quad (13)$$

எனக் கிடைக்கும்

சமன்பாடு (13) லிருந்து

$$i\|x+y+iz\|^2 - i\|x+y-iz\|^2 = i\|x+iz\|^2 - i\|x-iz\|^2 + i\|y+iz\|^2 - i\|y-iz\|^2 - \quad (14)$$

சமன்பாடு (13), (14) ஆகியவற்றைக் கூட்ட

$$\|x+y+iz\|^2 - \|x+y-z\|^2 + i\|x+y+iz\|^2 - i\|x+y-iz\|^2$$
$$= (\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + i\|x+iz\|^2$$
$$- i\|x-iz\|^2) + (\|y+z\|^2 - \|y-z\|^2 + i\|y+iz\|^2 - i\|y-iz\|^2)$$

இவற்றிலிருந்து $4(x+y,z) = 4(x,z) + 4(y,z)$ எனக் கிடைக்கும் அதாவது

$$(x+y,z) = (x,z) + (y,z) \qquad (15)$$

(ஈ) சமன்பாடு (15) லிருந்து

$$(x+x,y) = (x,y) + (x,y)$$
$$(2x,y) = 2(x,y)$$

எனவே $\alpha = 2$ எனும் போது $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$ என நிறைவு செய்கிறது. $\alpha = n$ எனும் போது $(nx, y) = n(x,y)$ என நிறைவு செய்வதாக எடுத்துக்கொள்வோம். இப்போது $\alpha = n+1$ எனில்

$$((n+1)x, y) = (nx + x, y) = (nx, y) + (x, y)$$
$$= n(x,y) + (x,y)$$
$$= (n+1)(x,y)$$

எனவே α - வின் அனைத்து நேர்ம மு மு எண்களுக்கும் $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$ நிறைவு செய்கிறது. α ஒரு எதிர்ம முழு எண் என எடுத்துக்கொள்வோமானால் அதாவது $\alpha = -\beta, \beta > 0$ எனில்

$$(\alpha x, y) = (-\beta x, y)$$
$$= (-\beta)(x,y)$$
$$= \alpha(x,y)$$

எனவே அனைத்து எதிர்ம முழு எண்களுக்கும் $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$ என நிறுவப்படுகிறது.

α - ஒரு விகிதமுறு எண் எனில், அதாவது $\alpha = p/q$

$$(x,y) = \left(q\frac{x}{q}, y\right) = q\left(\frac{x}{q}, y\right)$$

எனவே
$$\frac{1}{q}(x,y) = \left(\frac{x}{q}, y\right),$$

$$\frac{p}{q}(x,y) = p\left(\frac{x}{q}, y\right)$$

$$= \left(\frac{p}{q}x, y\right)$$

எனவே α- விகிதமுறு எண்ணாக இருக்கும் போது $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$ நிறுவப் படுகிறது. இதே போல α என்பது ஒரு மெய்யெண் அல்லது மெய்புனை எண்ணாக இருந்தாலும் $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$ என்பது உண்மையாகும்.

14. செங்குத்து நிரப்பிகள் (Orthogonal Complements)

ஒரு ஹில்பர்ட் வெளியில் உள்ள x, y என்ற திசையன்கள் $(x, y) = 0$ எனும்போது செங்குத்துத் திசையன்கள் எனப்படும். இதனை $x\perp y$ எனக் குறிப்பிடலாம். இங்கு $(x,y) = \overline{(y, x)}$ எனவே $x \perp y \Leftrightarrow y \perp x$. மேலும் x-ன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் $x \perp 0$ மற்றும் $(x, x) = \| x \|^2$. இவற்றிலிருந்து பூச்சியம் மட்டுமே தனக்குத்தானே செங்குத்தாக உள்ள திசையன் ஆகும் என்பது தெளிவாகிறது.

பிதாகோரியன் தேற்றம் 14.1 (Pythagorean Theorem)

x, y என்பன செங்குத்து திசையன்கள் எனில் $\| x + y \|^2 = \| x - y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2$

இந்த தேற்றத்தின் நிறுவல் மிகவும் எளிமையானது. எனவே இதன் நிறுவலை படிப்பவர்களுக்கு விடப்படுகிறது.

x என்ற திசையன் S-ல் உள்ள ஒவ்வொரு திசையன் y-யுடன் $x \perp y$ என்றவாறு இருக்குமெனில், $x \perp S$ என்றழைக்கலாம். S-ல் உள்ள அனைத்துத் திசையன்களுக்கும் செங்குத்தாக உள்ள திசையன்களின் கணம் செங்குத்து நிரப்பி (Orthogonal Complement) எனப்படும். இதனை $S^\perp$ எனக்குறிப்பிடலாம் அதாவது $S^\perp = \{x : x\perp y,$ அனைத்து $y\in S\}$. இந்த வரையறையிலிருந்து கீழே உள்ள துணைத் தேற்றத்தை எளிதில் நிறுவலாம்.

துணைத் தேற்றம் 14.2

H என்பது ஹில்பர்ட் வெளி எனில்

(i) $\{0\}^\perp = H$

(ii) $H^\perp = \{0\}$

(iii) $S \cap S^\perp = \{0\}$

(iv) $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow S_2^{\perp} \subseteq S_1^{\perp}$

நிறுவல்: (i) $x \in H$ எனில் $(x,0) = 0$. எனவே $x \in \{0\}^\perp$. இவற்றிலிருந்து $H \subseteq \{0\}^\perp$ எனலாம்

மேலும் $\{0\}^\perp \subseteq H$. எனவே $\{0\}^\perp = H$

(ii) $x\in H^\perp$ எனில் $(x, y) = 0$, அனைத்து $y \in H$. $y = x$ என எடுத்துக்கொள்வோமானால் $(x, x) = 0 \Rightarrow \| x\|^2 = 0$

$$x = 0. \text{ எனவே } x \in H^\perp \Rightarrow x = 0. \text{ எனவே } H^\perp \subseteq \{0\}$$

இவற்றிலிருந்து $H^\perp = \{0\}$ எனலாம்.

(iii) $x \in S \cap S^\perp$ எனில், $x \in S$ மற்றும் $x \in S^\perp$. எனவே $(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$

இவற்றிலிருந்து $S \cap S^{\perp} \subseteq \{0\}$ மேலும் $\{0\} \subseteq S \cap S^{\perp}$. எனவே $S \cap S^{\perp} = \{0\}$

(iv) $S_1 \subseteq S_2$ என்க. எனவே

$$x \in S_2^{\perp} \Rightarrow (x, y) = 0, y \in S_2$$
$$\Rightarrow (x, y) = 0, y \in S_1$$
$$\Rightarrow x \in S_1^{\perp}$$

இவற்றிலிருந்து $S_2^{\perp} \subseteq S_1^{\perp}$

தேற்றம் 14.3

S என்பது H என்ற ஹில்பர்ட் வெளியின் வெற்றற்ற உட்கணம் எனில், $S^{\perp}$ என்பது H-ல் மூடிய உள்வெளி ஆகும். மேலும் அது ஒரு ஹில்பர்ட் வெளி ஆகும்.

நிறுவல்: இங்கு $S^{\perp} = \{x \in H: (x, y) = 0,$ அனைத்து $y \in S\}$, S-ல் உள்ள ஒவ்வொரு y-யும் $(0, y) = 0$ என்றவாறு இருக்கும். எனவே $0 \in S^{\perp}$. ஆதலால் $S^{\perp}$ என்பது வெற்றற்ற கணம். மேலும் $x_1, x_2 \in S^{\perp}, \alpha, \beta \in R$ அல்லது C எனில்,

$$(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha (x_1, y) + \beta (x_2, y)$$
$$= \alpha 0 + \beta 0$$
$$= 0$$

எனவே $\alpha x_1 + \beta x_2 \in S^{\perp}$ ஆதலால் $S^{\perp}$ என்பது H-ன் உள்வெளி

நாம் இப்போது $S^{\perp}$ என்பது H-ல் மூடிய உள்வெளி என நிறுவ வேண்டும். $\{x_n\}$என்ற தொடர் வரிசையை $S^{\perp}$-ல் எடுத்துக்கொள்வோம். இது H-ல் உள்ள x என்ற புள்ளியில் குவிவதாக எடுத்துக் கொள்வோம். இங்கு $x_n \in S^{\perp}$ எனவே, $(x_n, y) = 0, y \in S$, $n = 1, 2, ..$ மேலும் உள் பெருக்கல் என்பது தொடர்ச்சியான சார்பு. எனவே n-அளவிலியை நெருங்கும் போது $(x_n, y) \rightarrow (x, y)$ நெருங்கும். ஆனால் ஒவ்வொரு n-க்கும் $(x_n, y) = 0$. எனவே, $(x, y) = 0$. இவற்றிலிருந்து $x \in S^{\perp}$அதனால் $S^{\perp}$என்பது H-ல் மூடிய உள்வெளி. எனவே $S^{\perp}$ ஒரு ஹில்பர்ட் வெளி ஆகும்.

M என்பது H-ன் மூடிய நேரியல் உள்வெளி என்க. எனவே தேற்றம் 14.3–ன் படி $M^{\perp}$-யும் மூடிய உள்வெளி. மேலும் M, $M^{\perp}$-க்கு இடையே பூச்சியம் மட்டுமே பொதுவானது. இந்தப் பகுதியில், நமது முக்கிய நோக்கமே $H = M \oplus M^{\perp}$ என நிறுவுவதேயாகும். இப்பகுதியில் இனி வரும் தேற்றம் ஒவ்வொன்றும் இந்த திசையிலேயே செல்லும்.

தேற்றம் 14.4

M என்பது H என்ற ஹில்பர்ட் வெளியின் மூடிய நேரியல் உள்வெளி என்க. x என்பது M-ல் இல்லாத ஒரு திசையன் என்க, மற்றும் d என்பது x-க்கும் M-க்கும்

இடையே உள்ள தொலைவு எனில், அதற்குத் தகுந்தாற்போல M-ல் y_0 என்ற ஒரே ஒரு திசையன் $\| x - y_0 \| = d$ என்றவாறு இருக்கும்.

நிறுவல்: M என்பது H-ன் மூடிய உள்வெளி. எனவே $C = x + M$ என்பது மூடிய குவிவெளி (Closed convex set), d என்பது ஆதிப் புள்ளியிலிருந்து C-க்கு இடையே உள்ள தொலைவு என்பதால் தேற்றம் 13.4-ன் படி அதற்குத் தகுந்தாற்போல C-ல் z_0 என்ற திசையன் $\| z_0 \| = d$ என்றவாறு இருக்கும். திசையன் $y_0 = x - z_0$ என்பது M-ல் இருக்குமென்பதை எளிதில் காணலாம். மேலும் $\| x - y_0 \| = \| z_0 \| = d$. இந்த y_0 ஒருமைத் தன்மை வாய்ந்தது என நிறுவவேண்டும். அவ்வாறில்லையெனில் M-ல் y_1 என்ற திசையன் $y_1 \neq y_0$ மற்றும் $\| x - y_1 \| = d$ என்றவாறு, உள்ளதாக எடுத்துக்கொள்வோம். எனவே $z_1 = x - y_1$ என்பது C-ல் $z_1 \neq z_0$ மற்றும் $\| z_1 \| = d$ என்றவாறு உள்ள ஒரு திசையன் ஆகும். இது z_0-ன் ஒருமைத் தன்மைக்கு முரண்பாடாகும்.

தேற்றம் 14.5

M-என்பது H என்ற ஹில்பர்ட் வெளியின் முறையான மூடிய உள்வெளி எனில், அதற்குத் தகுந்தாற் போல் H-ல், z_0 என்ற திசையன் $z_0 \perp M$ என்றவாறு, இருக்கும்.

நிறுவல்: x என்பது M-ல் இல்லாத ஒரு திசையன் என்க. மேலும் d என்பது x-க்கும், M-க்கும் இடையே உள்ள தொலைவு என்க. தேற்றம் 14.4-ன் படி, அதற்குத் தகுந்தாற் போல் M-ல் y_0 என்ற திசையன் $\| x - y_0 \| = d$ என்றவாறு இருக்கும். z_0 என்பதை $z_0 = x - y_0$ என வரையறை செய்வோம். இங்கு $d > 0$ எனவே z_0 ஒரு பூச்சியமற்ற திசையனாகும். இந்தத் தேற்றத்தின் நிரூபணத்தை முடிப்பதற்கு M-ல் உள்ள ஏதாவது ஒரு திசையன் y-க்கு $z_0 \perp y$ என நிறுவினால் போதுமானதாகும். α- என்பது ஏதாவது ஒரு அளவன் எனில்,

$$\|z_0 - \alpha y\| = \|x - (y_o + \alpha y)\| \geq d = \|z_o\|$$

எனவே $$\|z_o - \alpha y\|^2 \geq \|z_o\|^2$$

$$\Rightarrow \|z_o - \alpha y\|^2 - \|z\|^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow -\bar{\alpha}(z_o, y) - \alpha\overline{(z_o, y)} + |\alpha|^2 \|y\|^2 \geq 0$$

$\alpha = \beta(z_o, y)$ எனப் பிரதியிட்டால் $-2\beta|(z_0, y)|^2 + \beta^2 |(z_0, y)^2| \, \|y\|^2 \geq 0$ எனக் கிடைக்கும். இங்கு β ஒரு மெய்யெண். $a = |(z_0\, y)|^2$, $b = \| y \|^2$ என எடுத்துக்கொள்வோமானால் $-2a\beta + \beta^2 a b \geq 0$ என நமக்குக் கிடைக்கும்.

ஆகையால் $\beta a (\beta b - 2) \geq 0$, β-வின் அனைத்து மெய்மதிப்புகளுக்கும் இது பொருந்தும். இருந்தபோதிலும் $a > 0$ எனும் போது, β மிகச் சிறிய நேர்ம எண்ணாக இருக்கும் போது, இது தவறானதாக அமையும். எனவே $a = 0$. அதாவது $z_0 \perp y$.

அடுத்த தேற்றம் நிறுவுவதற்கு கூடுதலாக கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சில கருத்துகள் தேவைப்படுகின்றன. S_1, S_2 என்பது ஹில்பர்ட் வெளியின் இரண்டு உள்வெளிகள். இந்த உள் வெளிகள், $x \perp y$, $x \in S_1$, $y \in S_2$ என்றவாறு இருக்குமானால் அவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து வெளிகள் (orthogonal spaces) எனப்படும்.

தேற்றம் 14.6.

M, N என்பன H-என்ற ஹில்பர்ட் வெளியில் $M \perp N$ என்றவாறு உள்ள இரு மூடிய நேரியல் உள்வெளிகள் எனில், M+N என்ற நேரியல் உள்வெளியும் மூடியதாகும்.

நிறுவல்: z என்பது M+N-ன் எல்லைப் புள்ளி என்க. எனவே z என்பது M+N-ல் இருக்கும் என நிறுவினால் போதுமானதாகும். M+N-ல் z என்ற புள்ளிக்கு தகுந்தாற்போல், $z_n \to z$ என்றவாறு $\{z_n\}$ என்ற வரிசைத்தொடர் நிச்சயமாக இருக்கும். நமது தற்கோள் (assumption) $M \perp N$-ன் படி M, N ஆகியவை இணைப்பில்லா கணம் ஆகும். ஆகையால் ஒவ்வொரு z_n-ஐயும் ஒரே ஒரு வழியில் $z_n = x_n + y_n$ என எழுதலாம். இங்கு $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ என்பன முறையே M மற்றும் N-ல் உள்ள காசியின் தொடர்வரிசை என்க. மேலும்பிதாகோரியன் தேற்றத்தின்படி, பிதாகோரியன் தேற்றத்தின்படி, $\|x_m-x_n\|^2 + \|y_m-y_n\|^2 = \|z_m-z_n\|^2$. இவற்றிலிருந்து $\{x_n\}$ மற்றும் $\{y_n\}$ ஆகியவை காசியின் தொடர்வரிசையாகும். இங்கு, M, N மூடிய உள்வெளிகள். எனவே M, N முழு வெளிகள். ஆதலால் x, y என்ற திசையன் முறையே M, N-ல், $x_n \to x$, $y_n \to y$ என்றவாறு இருக்கும். இவற்றிலிருந்து $x + y \in M + N$ மேலும் $z = \lim z_n = \lim (x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n = x + y$ எனவே $z \in M + N$.

நாம் இப்போது இந்தப் பகுதியின் முக்கியத் தேற்றத்திற்கு வருவோம்.

தேற்றம் 14.7

M என்பது N என்ற ஹில்பர்ட் வெளியின் மூடிய நேரியல் வெளி எனில், $H = M \oplus M^{\perp}$ ஆகும்.

நிறுவல்: $M, M^{\perp}$ என்பன H என்ற ஹில்பர்ட் வெளியின் ஒன்றுக்கொன்றான செங்குத்து மூடிய நேரியல் உள்வெளிகளாதாலால், தேற்றம் 14.6-ன் படி $M+M^{\perp}$-ம் H-ன் மூடிய நேரியல் உள்வெளி ஆகும். நாம் இப்போது $M+M^{\perp} = H$ என நிறுவ வேண்டும். அவ்வாறு இல்லையெனில் தேற்றம் 14.5- ன் படி, $z_0 \perp (M+M^{\perp})$ என்றவாறு z_0 என்ற பூச்சியமல்லாத திசையன் H-ல் இருக்கும். இந்தப் பூச்சியமல்லாத திசையன் $M^{\perp} \cap M^{\perp\perp}$-ல் இருக்கும் என்பது மிகவும் வெளிப்படையானதே. இது ஓர் முரண்பாடாகும். எனவே $H = M+M^{\perp}$ மேலும் $M, M^{\perp}$ சேர்ப்பில்லாத கணம் (disjoint set). இவற்றிலிருந்து $H = M \oplus M^{\perp}$.

15. அலகுச் செங்குத்துக் கணம் (Orthonormal set)

H என்ற ஹில்பர்ட் வெளியில், ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக ஒரு அலகு மதிப்புள்ள திசையன்களின் உட்கணம் என்பது **அலகுச் செங்குத்துக் கணம்** எனப்படும். அதாவது H-ன் வெற்றற்ற உட்கணம் $\{e_i\}$-ஐ கீழ்க்கண்ட தன்மைகளைக் கொண்டிருக்கும்.

(1) $i \neq j \Rightarrow e_i \perp e_j$

(2) $\| e_i \| = 1$, i - ன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும்

H-ல் பூச்சிய திசையன் மட்டுமே இருக்குமானால், அதற்கு அலகுச் செங்குத்துக் கணம் இருக்காது. H-ல் x என்ற பூச்சியமல்லாது திசையன் இருக்குமானால், அதனை $e = \frac{x}{\|x\|}$ என்ற அலகு திசையனாக்கலாம். எனவே ஒரே திசையனையுடைய கணம் $\{e\}$ அலகுச் செங்குத்துக் கணம் ஆகும்.

பொதுவாக $\{x_i\}$ என்ற ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உள்ள கணத்தின் திசையன்களுக்குப் பதிலாக $e_i = \frac{x_i}{\|x_i\|}$ என்ற அலகுச் செங்குத்துத் திசையன்களாக மாற்றும் போது நமக்கு $\{e_i\}$ என்ற அலகுச் செங்குத்துக் கணம் கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு : 1

l_2^n- ன் உட்கணம் $\{(1,0,0...0), (0,1,0...0)\ (0,0,1,0...0) \ldots (0,0,...0,1)\}$ ஓர் அலகுச் செங்குத்துக் கணம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு : 2

l_2 - என்ற ஹில்பர்ட் வெளியின் உட்கணம் $\{(1,0,...), (0,1,0...), (0,0,1,0,...).....\}$ ஓர் அலகுச் செங்குத்துக் கணம் ஆகும்.

தேற்றம் 15.1

$\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ என்பது H என்ற ஹில்பர்ட் வெளியின் முடிவுறு அலகுச் செங்குத்துக் கணம் என்க. x என்பது H-ல் ஏதாவது ஒரு திசையன் எனில்,

$$\sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2 \qquad - \qquad (1)$$

ஆகும். மேலும்,

ஒவ்வொரு j-க்கும், $x - \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i \perp e_j \qquad - \qquad (2)$

ஆகும்.

நிறுவல்: இப்போது $\left\| x - \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i \right\|^2 \geq 0$

$$\Rightarrow \left(x - \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i ,\, x - \sum_{j=1}^{n} (x, e_j) e_j \right) \geq 0$$

$$\Rightarrow (x, x) - \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) \overline{(x, e_i)} - \sum_{j=1}^{n} (x, e_j) \overline{(x, e_j)} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x, e_i) \overline{(x, e_j)} (e_i, e_j) \geq 0$$

$$\Rightarrow \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)|^2 \geq 0$$

எனவே $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)|^2$

மேலும் $\left(x - \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i ,\, e_j \right) = (x, e_j) - \sum_{i=1}^{n} (x, e_i)(e_i, e_j) = (x, e_j) - (x, e_j) = 0$

எனவே j-ன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் $x - \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i \perp e_j$.

சமனிலி (1) மிக முக்கியமான வடிவியலில் விளக்கங்களைக் கொண்டுள்ளது என்பதைப் படிப்பவர்கள் நன்கு உணரவேண்டும். அதாவது, வெவ்வேறு செங்குத்துத் திசைகளில் உள்ள திசையன்களின் கூறுகளின் படியின் கூடுதல், அந்தத் திசையனின் நீளத்தை விட அதிகமாக இருக்காது. இந்தச் சமனிலி சாதாரணமாகப் பெசல் சமனிலி (Bessel's inequality) எனக் குறிப்பிடப்படும். இதனுடைய பொதுவான சமனிலி இதே பெயரில் கீழே கொடுக்கப்பட்டிருந்தாலும், இந்த சமனிலியின் பெயரிலும் அதை பயன்படுத்துவதும் ஒரு முக்கியமான சிறப்பம்சமாகும். (1) மற்றும் (2)- ல் உள்ள கூடுதலில் உள்ள n-ன் மதிப்புகளுக்கு எந்தக் கட்டுபாடும் இல்லாமல் நிறுவப்படுவதே அடுத்த தேற்றத்தின் நோக்கமாகும். அதை நிறுவுவதற்கு முன்பு முதலில், கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தேற்றத்தைப் பார்ப்போம்.

தேற்றம் 15.2

$\{e_i\}$ என்பது H-என்ற ஹில்பர்ட் வெளியின் அலகுச் செங்குத்துக் கணம் மற்றும் H- ல் x என்பது ஏதாவது ஒரு திசையன் எனில், $S_n = \{e_i : (x, e_i) \neq 0\}$ என்ற கணம் வெற்றுக் கணமாகவோ அல்லது எண்ணத்தக்க (Countable) கணமாகவோ இருக்கும்.

நிறுவல்: ஒவ்வொரு நேர்ம முழு எண் n-க்கும் $S_n = \left\{ e_i : |(x, e_i)|^2 > \|x\|^2 / n \right\}$ என்ற கணத்தை எடுத்துக்கொள்வோம். பெசல் சமனிலியின்படி S_n-ல் அதிகபட்சமாக n-1 திசையன்கள் இருக்கும். மேலும் $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. எனவே S என்பது எண்ணத்தக்க கணம் ஆகும்.

இந்த முடிவைப் பயன்படுத்தி பெசல் சமனிலியின் பொதுவான அமைப்பை நிறுவுவோம்.

தேற்றம் 15.3 (பெசல் சமனிலி)

H என்ற ஹில்பர்ட் வெளியில் $\{e_i\}$ என்பது ஓர் அலகுச் செங்குத்துக் கணம் எனில், H-ல் உள்ள ஒவ்வொரு திசையன் x-க்கும் $\sum |(x,e_i)|^2 \leq \| x \|^2$ - (3) என இருக்கும்.

நிறுவல்: முந்தைய தேற்றத்தில் உள்ளது போல $S_n = \{e_i : (x,e_i) \neq 0\}$ என்ற கணத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். S என்பது வெற்றுக் கணம் எனில் $\sum |(x,e_i)|^2 = 0$ என வரையறுப்போம். எனவே சமனிலி (3) மிகவும் எளிதில் நிருபணமாகிறது. நாம் இப்போது S-வெற்றற்ற கணம் என எடுத்துக்கொள்வோம். தேற்றம் 15.2-ன் படி S ஒரு முடிவுறு அல்லது எண்ணத்தக்க முடிவுறாக் கணம் ஆகும். S ஒரு முடிவுறு கணம் எனில் இதனை $S = \{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ என எழுதலாம். மேலும் $\sum |(x,e_i)|^2$ என்ற கூடுதல் $\sum_{i=1}^{n} \left|(x,e_i)\right|^2$ என மாறும் போது சமனிலி (3) சமனிலி (1) ஆக மாறுகின்றது. சமனிலி (1) ஏற்கனவே நிருபிக்கப்பட்ட ஒன்றாகும். மேலும் நிறுவப்பட வேண்டியது, S என்பது எண்ணத்தக்க முடிவுறாக் கணமாக இருக்கும்போது மட்டுமே. S-ல் உள்ள திசையன்களை நமக்குத் தெரிந்த வரிசையில் $S = \{e_1, e_2, e_3, \ldots e_n \ldots\}$ என வரிசைப்படுத்துவோம்.

அற ஒருங்குத்தொடர் கோட்பாட்டின்படி, $\sum_{i=1}^{\infty} \left|(x,e_i)\right|^2$ என்ற தொடர் குவியும் தொடர் எனில், அத்தொடரின் உறுப்புகளை மாற்றியமைத்து எழுதியபின்பும் அத்தொடர் குவியும் தொடராகவே இருக்கும். இவ்வாறு உருவாக்கப்படும் அனைத்துத் தொடர்களும் ஒரே கூடுதலைக் கொண்டிருக்கும். எனவே $\sum |(x,e_i)|^2$ என்ற தொடரை $\sum_{i=1}^{\infty} \left|(x,e_i)\right|^2$ என வரையறை செய்வோம். இவற்றிலிருந்து மேலே குறிப்பிட்ட குறிப்பிலிருந்தும் $\sum |(x,e_i)|^2$ என்பது ஒரு எதிர்ம்மல்லாத நீட்டிக்கப்பட்ட மெய்யெண் (Extended real number) ஆகும். இது S-ல் உள்ள திசையன்களைப் பொறுத்து அமையும், அதன் வரிசை பொறுத்து அமையாது. இந்த வகையில் (3)-ல் உள்ள சமனிலி

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|(x,e_i)\right|^2 \leq \| x \|^2 \qquad - \qquad (4)$$

என மாறுகிறது. சமன்பாடு (1) லிருந்து, (4) -ன் இடதுபுறத்தில் உள்ள தொடரின் எந்த பகுதிக் கூட்டலும் $\| x \|^2$-ஐ விட அதிகமாக இருக்காது. எனவே சமன்பாடு (4) உண்மையாகிறது.

தேற்றம் 15.4

H என்ற ஹில்பர்ட் வெளியில் $\{e_i\}$ என்பது அலகுச் செங்குத்துக் கணம். H-ல் x என்பது ஏதாவது ஒரு திசையன் எனில், ஒவ்வொரு j-க்கும்

$$x - \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_i)e_i \perp e_j \text{ ஆக இருக்கும்} \qquad (5)$$

நிறுவல்: தேற்றம் 15.2-ல் உள்ளது போல $S = \{e_i : (x, e_i) \neq 0\}$ என வரையறை செய்வோம். S வெற்றுக் கணம் எனில் $\sum (x, e_i)e_i$ என்பதை பூச்சிய திசையன் என வரையறுப்போம். எனவே $x - \sum (x, e_i)e_i = x - 0 = x$. அதாவது x என்ற திசையன் ஒவ்வொரு e_j-க்கும் செங்குத்தாக இருக்கும். இதுவும், S வெற்றுக் கணம் என்பதும் ஒன்றேயாகும். நாம் இப்போது S-என்பது முடிவுறு வெற்றற்ற கணம் என எடுத்துக்கொள்வோம். அதாவது $S = \{e_1, e_2, \ldots e_n\}$. நாம் இப்போது $\sum_{i=1}^{\infty}(x, e_i)e_i$ ஐ $\sum_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i$ என எடுத்துக்கொள்வோம். இதனால் சமன்பாடு (5) சமன்பாடு (2) ஆக மாறுகிறது. இது ஏற்கனவே தேற்றம் 15.1- ல் நிறுவப்பட்டதாகும்.

இப்போது S-என்பது எண்ணத்தக்க முடிவில்லாக் கணம் என்க. இதனை $S = \{e_1, e_2, \ldots\}$ என்ற வரிசைப்படி எடுத்துக்கொள்வோம். $S_n = \sum_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i$ என்க. மேலும் $m > n$ எனும் போது

$$\|S_m - S_n\|^2 = \left\| \sum_{i=n+1}^{m}(x, e_i)e_i \right\|^2 = \sum_{i=n+1}^{m}|(x, e_i)|^2$$

பெசல் சமனிலிபடி $\sum_{i=1}^{\infty}|(x, e_i)|^2$ என்ற தொடர் குவியும் தொடர் ஆகும். எனவே $\{S_n\}$ என்பது H-ல் ஒரு காசி தொடர்வரிசை . ஆனால் இங்கு H என்பது ஒரு முழு வெளி. எனவே $\{S_n\}$ என்ற தெடர்வரிசை H-ல் உள்ள s என்ற புள்ளியில் குவிவதாக எடுத்துக்கொள்வோம். அதாவது $s = \sum_{i=1}^{\infty}(x, e_i)e_i$.இப்போது $\sum (x, e_i)e_i$-ஐ $\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$ என வரையறை செய்வோம். சமன்பாடு (2) மற்றும் உள்பெருக்கல் தொடர்ச்சியானது ஆகியவற்றின் படி

$$\begin{aligned}
(x - \sum (x, e_i), e_j) &= (x - s, e_j) \\
&= (x, e_j) - (s, e_j) \\
&= (x, e_j) - (\lim s_n, e_j) \\
&= (x, e_j) - \lim (s_n, e_j) \\
&= (x, e_j) - (x, e_j) \\
&= 0
\end{aligned}$$

எனவே $x - \sum (x,e_i)e_i$ என்பது ஒவ்வொரு e_j-க்கு செங்குத்தாக இருக்கும் என்பது நிரூபணமாகிறது.

இந்தத் தேற்றத்தின் நிறுவல் நிறைவடைவதற்கு, இறுதியாக S-ல் உள்ள திசையன்களை இடம் மாற்றி எழுதுவதனால், முடிவில் எந்த மாற்றமும் இருக்காது என நிறுவவேணடும். S-ல் உள்ள திசையன்கள் $S = \{f_1, f_2, f_3 \ldots\ldots\}$ என மாற்றி எழுதப்பட்டனவாகும். $S'_n = \sum_{i=1}^{n}(x, f_i)f_i$ என்க. இந்த தொடர்வரிசை, ஏற்கனவே விவரிக்கப்பட்டது போல H-ல் உள்ள s′ என்ற புள்ளியில் குவிகிறது என எடுத்துக்கொள்வோம். அதாவது $s' = \sum_{n=1}^{\infty}(x, f_n)f_n$ இந்தத் தேற்றத்தை முடிப்பதற்கு s = s′ என நிறுவவேண்டும். கொடுக்கப்பட்ட $\in > 0$ என்ற மெய்யெண்ணும் அதற்குத் தகுந்தாற்போல, $n \geq n_0$ எனில் $\|S_n - s\| < \in$, $\|S'_n - s'\| < \in$ மற்றும் $\sum_{i=n_0+1}^{\infty}|(x, e_i)|^2 < \in^2$ என்றவாறு உள்ள n_0 என்ற நேர்ம முழு எண் இருக்கும். மேலும் S_{n_0} -ல் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளையும் உள்ளடக்கிய S'_{m_0} என்ற உறுப்பு, $m_0 > n_0$ என்றவாறு $\{S'_n\}$-ல் இருக்கும். எனவே $S'_{m_0} - S_{n_0}$ என்பது $(x,e_i)e_i$, $i = n_0+1, n_0+2 \ldots\ldots$ ஆகியவற்றின்கூடுதலாகும். இவற்றிலிருந்து

$$\|S'_{m_0} - S'_{n_0}\|^2 \leq \sum_{i=n_0+1}^{\infty}|(x, e_i)|^2 < \in^2.$$

ஆகையால் $\|S'_{m_0} - S_{n_0}\| < \in$. இப்போது $\|s' - s\| \leq \|s' - S'_{m_0}\| + \|S'_{m_0} - S_{n_0}\| + \|S_{n_0} - s\| < 3\in$. இவற்றிலிருந்து s = s′ ஆகும்.

H என்பது பூச்சியில்லா ஹில்பர்ட் வெளி. H-ன் அனைத்து அலகுச் செங்குத்துக் கணங்களின் வகுப்பு (Class) வெற்றற்ற கணமாகும். இதில் உள்ள உறுப்புகள் பகுதி வரிசைப்படுத்தப்பட்ட கணம் (Partially ordered set) ஆகும். இந்த வகுப்பில் உள்ள பெருமக்கணம் (maximal set) முழு அலகுச் செங்குத்துக் கணம் (Complete orthonormal set) எனப்படும். அதாவது, $\{e_i\}$ என்பது முழு அலகுச் செங்குத்துக் கணம் எனில், $\{e_i, e\}$ என்பது முழு அலகுச் செங்குத்துக் கணமாக உள்ளவாறு $\{e_i\}$ உடன் e-ஐ சேர்ப்பது இயலாததாகும்.

தேற்றம் 15.5

பூச்சியமில்லா ஒவ்வொரு ஹில்பர்ட் வெளியும் ஒரு முழு அலகுச் செங்குத்துக் கணத்தை உள்ளடக்கியிருக்கும்.

நிறுவல்: $\{S_\alpha\}$ என்பது H-என்ற ஹில்பர்ட் வெளியின் அலகுச் செங்குத்துக் கணங்களின் தொகுப்பு என்க. இந்த தொகுப்பில் $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3 \ldots$ என்ற பகுதி வரிசையை உருவாக்குவோம். $S = \cup S_\alpha$ எனில் S என்பதும் ஒரு அலகுச் செங்குத்துக் கணம் ஆகும். எனவே ஜோன் துணைத் தேற்றத்தின் (Zorn's lemma) ஏதாவது ஒரு சங்கிலி (Chain) யின் சேர்ப்புக் கணம் அந்தச் சங்கியிலியின் மேல் எல்லை ஆகும். எனவே H என்ற ஹில்பர்ட் வெளி முழு அலகுச் செங்குத்துக் கணத்தை உள்ளிடக்கியிருக்கும்.

தேற்றம் 15.6

$\{e_i\}$ என்பது H-என்ற ஹில்பர்ட் வெளியில் அலகுச் செங்குத்துக் கணம் என்க. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கட்டுபாடுகள் ஒன்றுக்கொன்று சமமானவையாகும்.

(1) $\{e_i\}$ என்பது முழு அலகுச் செங்குத்துக் கணம்

(2) $x \perp \{e_i\} \Rightarrow x = 0$

(3) x என்பது H-ல் ஏதாவது ஒரு திசையன் எனில், $x = \sum (x, e_i)\, e_i$ ஆகும்

(4) x என்பது H-ல் ஏதாவது ஒரு திசையன் எனில் $\| x \|^2 = \sum |(x, e_i)|^2$ ஆகும்

நிறுவல்

(1) $\Rightarrow$ (2) $\{e_i\}$ என்பது முழு அலகுச் செங்குத்துக் கணம் என்க. $x \perp \{e_i\} \Rightarrow x = 0$ என நிறுவ வேண்டும். அவ்வாறு இல்லையெனில், $x \perp \{e_i\}$ என்றவாறு $x \neq 0$ என்ற திசையன் H-ல் இருக்குமெனில், $e = x/\|x\|$ என வரையறை செய்யலாம். இவற்றிலிருந்து $\{e_i, e\}$ என்பது ஒரு அலகுச் செங்குத்துக் கணம் என்பது தெளிவாகிறது. இது $\{e_i\}$ என்பது முழு அலகுச் செங்குத்துக் கணம் என்பதற்கு முரண்பாடாக அமைகிறது. எனவே நமது தற்கோள் தவறாகும்.

(2) $\Rightarrow$ (3) $x \perp \{e_i\} \Rightarrow x = 0$ என்க. தேற்றம் 15.4- ன் படி $x - \sum (x, e_i)\, e_i$ என்பது $\{e_i\}$-க்கு செங்குத்தானதாகும். எனவே (2)- ன் படி $x - \sum (x, e_i)\, e_i = 0$. அதாவது $x = \sum (x, e_i)\, e_i$

(3) $\Rightarrow$ (4) உட்பெருக்கல் தொடர்ச்சியானது என்ற முடிவின்படி

$$\begin{aligned} \| x \|^2 &= \left(\sum (x,e_i)\, e_i,\ \sum (x, e_j) e_j \right) \\ &= \sum (x,e_i)\, \overline{(x, e_i)} \\ &= \sum |(x,e_i)|^2 \end{aligned}$$

(4) $\Rightarrow$ (1) H-ல் உள்ள ஒவ்வொரு திசையன் x-ஐ $\| x \|^2 = \sum |(x,e_i)|^2$ என எழுதலாம் என்க. $\{e_i\}$ என்பது முழு அலகுச் செங்குத்துக் கணம் என நிறுவ வேண்டும். அவ்வாறில்லையெனில், $\{e_i\}$ என்பது $\{e_i, e\}$ என்ற அலகுச் செங்குத்துக் கணத்தில் உட்கணமாக இருக்கும். இங்கு e என்பது அனைத்து e_i-களுக்கும் செங்குத்தாக

இருக்கும். எனவே 4-ன் படி $\| e \|^2 = \sum |<e,e_i>|^2 = 0$. எனவே $e = 0$. இது e ஒரு அலகு திசையன் என்பதற்கு முரண்பாடாகும். எனவே நமது தற்கோள் தவறாகும்.

பயிற்சிக் கணக்குகள்

(1) S- என்பது H என்ற ஹில்பர்ட் வெளியின் வெற்றற்ற உட்கணம் எனில், $S^{\perp} = S^{\perp\perp\perp}$ என நிறுவுக

(2) M-என்பது H என்ற ஹில்பர்ட் வெளியில் நேரியல் உள்வெளி எனில், M-மூடிய உள்வெளியாக அமைய தேவையான மற்றும் போதுமான கட்டுப்பாடு $M = M^{\perp\perp}$

(3) ஒரு ஹில்பர்ட் வெளியில் உள்ள அலகுச் செங்குத்துக் கணம் நேரியல் சார்பற்ற கணம் (Linearly independent set) என நிறுவுக.

(4) l_2^n-என்ற வெளியில் $\{(1,0,0\,..0), (0,1,0..\,0), (0,0,1,..\,0), (0,0,...1)\}$ என்ற அலகுச் செங்குத்துக் கணம் முழு, அலகுச் செங்குத்துக் கணம் என நிறுவுக.

(5) ஒரு ஹில்பர்ட் வெளியில் உள்ள ஏதாவது இரண்டு முழு அலகு செங்குத்து கணம் ஒரே செவ்வெண் (Cardinal number) உடையது என நிறுவுக.

16. இணையிய வெளி (Conjugate Space)

இந்தப் பகுதியில் H என்ற ஹில்பர்ட் வெளியில் உள்ள ஒவ்வொரு திசையனுக்கும், அதற்கு தகுந்தாற்போல் H*-ல் ஒரு உறுப்பு, அதாவது ஒரு சார்பை, காண்பதுவும் அதன் தன்மைகளைப் பற்றியும் படிப்பதுமேயாகும்.

H என்ற ஹில்பர்ட் வெளியில் y என்பது நிலை திசையன் (fixed vector) என்க. $f_y(x) = (x, y)$ என்றவாறு f_y என்ற சார்பை H-ல் வரையறை செய்வோம். இந்த சார்பினை நேரியல் சார்பு என எளிதில் நிறுவலாம். அதற்காக,

$$f_y(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2, y)$$
$$= (x_1, y) + (x_2, y)$$
$$= f_y(x_1) + f_y(x_2)$$

மற்றும் $f_y(\alpha x) = (\alpha x, y)$
$$= \alpha (x, y)$$
$$= \alpha f_y(x)$$

மேலும் $| f_y(x) | = | (x, y) | \leq \| x \| \| y \|$

DR. T.P.M. LIBRARY ★ MADURAI KAMARAJ UNIVERSITY ★ 229099

இவற்றிலிருந்து $\| f_y \| \le \| y \|$ எனவே f_y என்பது தொடர்ச்சியான நேரியல் உருமாற்றமாகும். $\| f_y \| = \| y \|$ எனவும் கூட நிறுவலாம். $y = 0$ எனும்போது இது உண்மையாகிறது $y \neq 0$ எனில்

$$\|f_y\| = \sup \{|f_y(x)| : \|x\| = 1\}$$
$$\ge \left|f_y\left(y/\|y\|\right)\right|$$
$$= (y/\|y\|, y) = \|y\|$$

அதாவது, $\|f_y\| \ge \|y\|$

இவற்றிலிருந்து $\| f_y \| = \| y \|$ என்பது நிறுவப்படுகிறது. ஆதலால் $y \to f_y$ என்ற சார்பு அலகை மாறாமல் H-லிருந்து H*-க்கு வரையறை செய்யப்படுகிறது.

தேற்றம் 16.1

H என்பது ஹில்பர்ட் வெளி. f என்பது H*-ல் உள்ள ஏதாவது ஒரு சார்பின (functional) எனில் அதற்குத் தகுந்தாற்போல் $f(x) = (x,y)$ - (1)

என்றவாறு H-ல் அனைத்து x-களுக்கும் ஒரே ஒரு திசையன் y-இருக்கும்.

நிறுவல்: $f = 0$ எனில் இதற்குத் தகுந்தாற்போல் $y = 0$ என தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளலாம். எனவே $f \neq 0$ என எடுத்துக்கொள்வோம். M என்பது f-ன் வெற்று வெளி (Null space), என்க. இது H-ல் மூடிய முறையான உள்வெளி ஆகும். தேற்றம் 14.5- ன் படி M-க்கு செங்குத்தாக y_0 என்ற பூச்சியமற்ற திசையன் H-ல் இருக்கும். நாம் இப்போது, பொருத்தமான α -வை தேர்ந்தெடுப்பதற்கான, நமது தேவைகளை நிறைவு செய்யக்கூடிய $y = \alpha y_0$ என்ற y-ஐ உருவாக்குவோம். முதலில் α என்ன மதிப்பாக இருந்தாலும் M-ல் உள்ள ஒவ்வொரு x-க்கும் (1)- வது சமன்பாடு உண்மையாகிறது. என்பதை நாம் உணர்வோம். அதாவது $f(x) = (x, \alpha y_0) = 0$. இது நமக்கு $x = y_0$ என்ற மதிப்புக்கு (1) உண்மையாவதற்கு ஏற்றவாறு α -வை தேர்ந்தெடுக்க வழியை உருவாக்கித் தருகிறது. இது α -வின் மீது $f(y_0) = (y_0, \alpha y_0) = \overline{\alpha} \|y_0\|^2$ என்ற கட்டுப்பாட்டை புகுத்துகிறது. எனவே $\alpha = \overline{f(y_0)}/\|y_0\|^2$ எனத் தேர்ந்தெடுப்போம். இவற்றிலிருந்து சமன்பாடு (1), M-ல் உள்ள ஒவ்வொரு x-க்கும் $x = y_0$ எனும் போது உண்மையாகிறது.

H-ல் உள்ள ஒவ்வொரு x-ஐயும் $x = m + \beta y_0$, $m \in M$ என எழுதலாம் என்பதைக் காணமுடிகிறது. நமக்குத் தேவையானதெல்லாம் $f(x - \beta y_0) = f(x) - \beta f(y_0) = 0$ என்றவாறு உள்ள ஒரு β-வை தேர்ந்தெடுப்பதுதான். இது $\beta = f(x)/f(y_0)$ என்ற மதிப்பாகும். H-ல் உள்ள ஒவ்வொரு x-க்கும்

$$f(x) = f(m + \beta y_0) = f(m) + \beta f(y_0) = (m, y) + \beta (y_0, y)$$
$$= (m + \beta y_0, y)$$
$$= (x, y)$$

அதாவது $f(x) = (x, y)$, $x \in H$ ஆகும். இந்த y ஒருமைத்தன்மை வாய்ந்தது

எனநிறுவ வேண்டும். அவ்வாறில்லையெனில் $f(x)=(x,y')$ எனும்போது $(x,y')=(x,y) \Rightarrow (x,y'-y)=0$ எனவே $y'-y=0 \Rightarrow y'=y$.

குறிப்பு

இந்த தேற்றம் $y \rightarrow f_y$ என்று H-லிருந்து H*-க்கு வரையறை செய்யும் சார்பு அலகை மாறாத தன்மையுடைய நேரியல் உருமாற்றச் சார்பு ஆகும். இங்கு $f_y(x)=(x,y)$.

இப்போது $f_{y_1+y_2}(x)=(x, y_1+y_2)$

$$= (x,y_1)+(x,y_2)$$

$$= f_{y_1}(x)+f_{y_2}(x)$$

எனவே $f_{y_1+y_2} = f_{y_1}+f_{y_2}$

மேலும் $f_{\alpha y}(x)=(x,\alpha y)$

$$=\bar{\alpha}(x,y)$$

$$=\bar{\alpha} f_y(x)$$

இவற்றிலிருந்து $y \rightarrow f_y$ என்பது ஒரு நேரியல் உருமாற்றம், என நிறுவப்படுகிறது.

மேலும் $\|f_{x-y}\|=\|f_x-f_y\|=\|x-y\|$. இவற்றிலிருந்து $y \rightarrow f_y$ என்பது சமயாப்புள்ள சம ஒப்புமைச்சார்பு என்பது தெளிவாகிறது.

17. இணைபு மற்றும் தன் இணைபுச் செயலி (Adjoint and Self adjoint Operator)

T என்பது ஹில்பர்ட் வெளி H-ன் மீது வரையறை செய்யப்படும் செயலி. எனில், T*என்பது H*-ல் T-ஆல் உருவாக்கப்பட்ட செயலியாகும். இங்கு T*-ஐ $(T^*f)x=f(Tx)$ என வரையறை செய்யலாம். மேலும் $T \rightarrow T^*$ என்பது $\mathscr{B}(H)$- விருந்து $\mathscr{B}(H^*)$-க்கு வரையறை செய்யப்படும் சமயாப்புள்ள சம ஒப்புமைச் சார்பு எனவும் காணலாம்.

தேற்றம் 17.1

T என்பது ஹில்பர்ட் வெளி H-ல் ஒரு செயலி என்க. அதற்குத் தகுந்தாற் போல் H*-ல் T* என்ற ஒரே ஒரு செயலி $(Tx,y)=(x,T^*y)$ என்றவாறு H-ல் உள்ள அனைத்து x,y-க்கும் இருக்கும்.

நிறுவல்: முதலில் T* என்ற செயலி H*-ன் மீது இருப்பதை உறுதிப்படுத்துவோம். $y \in H$ எனில், $f_y(x)=(x,y)$ என்பது நேரியல் சார்பின (linear functional) ஆகும். அதாவது $f_y \in H^*$.

$T^*f_y=f_z$ என்க. இங்கு T* என்பது T-ன் இணைச் செயலி. இங்கு f_z-க்கு தகுந்தாற் போல் z என்ற திசையன் H-ல் இருக்கும். மேலும்,

$$y \rightarrow f_y \rightarrow T^*f_y = f_z \rightarrow z \qquad (1)$$

என்ற மூன்று சார்புகளைக் கருத்தில் கொள்வோம். $z = T^{*}y$ என எடுத்துக் கொள்வோமானால், T^* என்ற புதிய சார்பு H-லிருந்து H-க்கு வரையறை செய்யப்படும் T-ன் இணைபுச் செயலி (Adjoint operator) ஆகும்.

இப்போது $(T^*f_y)\,x = f_y(Tx) = (Tx, y)$ மற்றும்

$(T^*f_y)\,x = f_z(x) = (x, z) = (x, T^*y)$

எனவே $(Tx, y) = (x, T^*y), x\, y \in H$ - (2)

ஒவ்வொரு T-க்கும் (2)-ல் வரையறை செய்யப்பட்டவாறு ஒரே ஒரு T^* மட்டுமே இருக்கும். அவ்வாறில்லையெனில், T^*-ஐ அல்லாத T' என்ற நேரியல் சார்பின $(Tx, y) = (x, T'y), x, y \in H$

என்றவாறு இருக்கும் என எடுத்துக்கொள்வோம்.

எனவே $(x, T^*y) = (x, T'y)$

$\Rightarrow T^*y = T'y$

$\Rightarrow T^* = T'$

இவற்றிலிருந்து $(Tx, y) = (x, T^*y), x\, y \in H$ என்றவாறு ஒரே ஒரு T^* மட்டுமே இருக்கும் என்பது தெளிவாகிறது. நாம் இப்போது T^* என்பது நேரியல் சார்பின என நிறுவ வேண்டும். இதற்காக, $x, y, z \in H$,

$$\begin{aligned}(x, T^*(y+z)) &= (Tx, y+z) = (Tx, y) + (Tx, z)\\ &= (x, T^*y) + (x, T^*z)\\ &= (x, T^*y + T^*z)\end{aligned}$$

எனவே $T^*(y+z) = T^*y + T^*z$

இதேபோல $T^*(\alpha y) = \alpha\, T^*y$ எனவும் நிறுவலாம். ஆகவே T^* ஒரு நேரியல் உருமாற்றம் ஆகும்.

மேலும்
$$\begin{aligned}\|T^*y\|^2 &= (T^*y, T^*y)\\ &= (T\,T^*y, y) \le \|T\,T^*y\|\,\|y\|\\ &\le \|T\|\,\|T^*y\|\,\|y\|\end{aligned}$$

எனவே $\|T^*y\| \le \|T\|\,\|y\|$, y-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும், அதாவது

$\|T^*\| \le \|T\|$ - (3)

இவற்றிலிருந்து T^*-ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு ஆகும். எனவே T^*- ஒரு நேரியல் சார்பின (linear functional) ஆகும்.

மேலே உள்ள தேற்றத்திலிருந்து $T \to T^*$ என்ற சார்பு $\mathcal{B}(H)$லிருந்து $\mathcal{B}(H)$-க்கு ஒரு செயலி ஆகும். இந்தச் சார்பு $\mathcal{B}(H)$-ன் மீது இணைபுச் செயலி எனப்படும்.

தேற்றம் 17.2 $\mathcal{B}(H)$-ன் மீது $T \to T^*$ என்ற இணைபுச் செயலி கீழ்க்கண்ட தன்மைகளை கொண்டிருக்கும்

(1) $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$

(2) $(\alpha T_1)^* = \overline{\alpha}\; T_1^*$

(3) $(T_1 T_2)^* = T_2^*\, T_1^*$

(4) $T^{**} = T$

(5) $\| T^* \| = \| T \|$

(6) $\| T^* T \| = \| T \|^2$

நிறுவல்: (1) $x, y \in H, (x, (T_1+T_2)^* y) = ((T_1+T_2)x, y)$

$$= (T_1x + T_2x, y)$$
$$= (T_1x, y) + (T_2x, y)$$
$$= (x, T_1^*y) + (x, T_2^*y)$$
$$= (x, T_1^*y + T_2^*y)$$
$$= (x, (T_1^* + T_2^*) y)$$

எனவே $(T_1 + T_2)^* y = (T_1^* + T_2^*)y$

அதாவது $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$

(2) $(x, (\alpha T)^* y) = ((\alpha T) x, y)$

$$= \alpha (Tx, y)$$
$$= \alpha (x, T^* y)$$
$$= (x, \bar{\alpha} (T^* y))$$

எனவே $(\alpha T)^* y = \bar{\alpha} (T^* y)$

அதாவது $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} (T^*)$

(3) $(x, (T_1 T_2)^* y) = ((T_1 T_2) x, y)$

$$= (T_1 (T_2 x), y)$$
$$= (T_2 x, T_1^* y)$$
$$= (x, T_2^* T_1^* y)$$

எனவே $(T_1 T_2)^* y = (T_2^* T_1^*) y$

அதாவது $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$

(4) $(x, T^{**} y) = (T^* x, y)$

$$= \overline{(y, T^* x)}$$
$$= \overline{(Ty, x)}$$
$$= (x, Ty)$$

எனவே $T^{**} y = Ty$

அதாவது $T^{**} = T$

(5) சமன்பாடு (3)- ன் படி $\| T^* \| \leq \| T \|$. . இதில் T-க்குப் பதிலாக T^*-ஐ பிரதியிட

$\| T \| = \| T^{**} \| \leq \| T^* \|$ எனக் கிடைக்கும்.

அதாவது $\| T \| \leq \| T^* \|$. எனவே $\| T \| = \| T^* \|$.

(6) $\| T^* T \| \leq \| T^* \| \| T \| = \| T \| \| T \|$
$= \| T \|^2$

அதாவது $\| T^* T \| \leq \| T \|^2$

மேலும் $\| T x \|^2 = (Tx, Tx) = (T^* T x, y) \leq \| T^* T x \| \| x \| \leq \| T^* T \| \| x \|^2$

அதாவது $\| Tx \|^2 \leq \| T^* T \| \| x \|^2$

இவற்றிலிருந்து $\| T \|^2 \leq \| T^* T \|$

எனவே $\| T^* T \| = \| T \|^2$

தன் இணைபுச் செயலி

H என்ற ஹில்பர்ட் வெளியின் மீது வரையறை செய்யப்படும் A என்ற செயலி $A^* = A$ என்ற கட்டுப்பாட்டை நிறைவு செய்யுமானால் அது **தன் இணைபுச் செயலி** (Self adjoint operator) எனப்படும்.

தேற்றம் 17.3

$\mathcal{B}(H)$- ல் உள்ள அனைத்துத் தன் இணைபுச் செயலிகள் கணம் $\mathcal{B}(H)$-ல் மூடிய மெய் நேரியல் உள்வெளி ஆகும். எனவே அது ஒரு மெய் பானக் வெளி ஆகும்.

நிறுவல்: A_1, A_2 என்பன தன் இணைபுச் செயலிகள் என்க. எனவே $A_1^* = A_1, A_2^* = A_2$ இவற்றிலிருந்து α , β மெய்யெண்கள் எனில்

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)^* = \bar{\alpha} A_1^* + \bar{\beta} A_2^*$$
$$= \alpha A_1 + \beta A_2$$

எனவே $\alpha A_1 + \beta A_2$ ஒரு தன் இணைபுச் செயலி ஆகும். இவற்றிலிருந்து அனைத்துத் தன் இணைபுச் செயலிகள் $\mathcal{B}(H)$-ன் ஒரு நேரியல் உள்வெளி ஆகும்.

மேலும் $\{A_n\}$என்பது தன் இணைபு செயலிகளின் காசி தொடர்வரிசை என்க. அது A-ல் குவிவதாக எடுத்துக்கொள்வோம். இப்போது A-யும் ஒரு இணைபுச் செயலி என நிறுவவேண்டும். இதற்காக

$$\|A - A^*\| \leq \|A - A_n\| + \|A_n - A_n^*\| + \|A_n^* - A^*\|$$
$$= \|A - A_n\| + \|(A_n - A)^*\|$$
$$= \|A - A_n\| + \|A_n - A\|$$
$$= 2\|A_n - A\|$$

இங்கு $A_n \to A$. எனவே $A - A^* \to 0$. அதாவது $A = A^*$

தேற்றம் 17.4

A_1, A_2 என்பன H-ன் மீது தன் இணைபுச் செயலிகள் எனில், இவற்றின் பெருக்கல் $A_1 A_2$ தன் இணைபுச் செயலியாக அமையத் தேவையான மற்றும் போதுமான கட்டுப்பாடு $A_1 A_2 = A_2 A_1$

நிறுவல்: $A_1A_2 = A_2A_1$ என எடுத்துக்கொள்வோம். இப்போது $(A_1A_2)^* = A_2{}^*A_1{}^* = A_2A_1 = A_1A_2$ அதாவது $(A_1A_2)^* = A_1A_2$ எனவே A_1A_2 ஒரு தன் இணைபுச் செயலி ஆகும். மறுதலையாக, A_1A_2 ஒரு தன் இணைபுச் செயலி என்க. அதாவது

$$(A_1A_2)^* = A_1A_2$$
$$\Rightarrow A_2{}^*A_1{}^* = A_1A_2$$
$$\Rightarrow A_2A_1 = A_1A_2$$

தேற்றம் 17.5

T-என்பது H-ன் மீது ஒரு செயலி, x-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் $(Tx, x) = 0$ எனில் $T = 0$

நிறுவல்

$T= 0$ என நிறுவுவதற்கு முன்பு $(Tx,y) = 0$ என நிறுவவேண்டும். α, β என்பன மெய்புனை எண்கள் என்க.

$$\left(T(\alpha x+\beta y), \alpha x+\beta y\right) - |\alpha|^2(Tx,x) - |\beta|^2(Ty,y) = \alpha\bar{\beta}(Tx,y) + \bar{\alpha}\beta(Ty,x) \quad - \quad (4)$$

α, β வின் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும், சமன்பாடு (4)-ன் இடதுபுறம் பூச்சியமாகும். எனவே வலதுபுறமும் பூச்சியமாகும்.

அதாவது $\alpha\,\bar{\beta}\,(Tx,y) + \bar{\alpha}\,\beta\,(Ty,x) = 0 \quad - \quad (5)$

$\alpha = 1, \beta = 1$ என (5)-ல் பிரதியிட $(Tx,y)+(Ty,x) = 0 \quad - \quad (6)$

$\alpha = i, \beta = 1$ என (5)-ல் பிரதியிட, $i\,(Tx,y) - i\,(Ty,x) = 0 \quad - \quad (7)$

சமன்பாடு (7)-ஐ i-ஆல் வகுத்து (6)-உடன் கூட்டும் போது $2(Tx,y) = 0$ எனக் கிடைக்கும். எனவே $(Tx,y) = 0$. இங்கு T ஒரு செயலி, எனவே y-க்குத் தகுந்தாற் போல் x என்ற திசையன் H- ல் $Tx = y$ என்றவாறு இருக்கும்.

ஆகவே $(Tx,y) = 0$

$$\Rightarrow (Tx, Tx) = 0$$
$$\Rightarrow \|Tx\|^2 = 0$$

$\Rightarrow T = 0$ இத்துடன் தேற்றம் நிறைவுறுகிறது.

தேற்றம் 17.6

H என்ற ஹில்பர்ட் வெளியின் மீது உள்ள செயலி T ஒரு தன் இணைபுச் செயலியாக அமையத் தேவையான மற்றும் போதுமான கட்டுப்பாடு x-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் (Tx,x) ஒரு மெய்யெண் ஆகும்.

நிறுவல்: T ஒரு தன்இணைபுச் செயலி என்க. $\overline{(Tx,x)} = (x, Tx) = (x, T^*x) = (Tx, x)$ இவற்றிலிருந்து (Tx, x) மெய்யெண் என்பது தெளிவாகிறது. மறுதலையாக x- ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் (Tx, x) ஒரு மெய்யெண் என்க. அதாவது $(Tx,x) = \overline{(Tx,x)} = \overline{(x,T^*x)} = (T^*x, x)$ அல்லது $([T - T^*]\,x, x) = 0$. தேற்றம் 17.5- ன் படி $T - T^* = 0$ எனவே $T = T^*$ ஆதலால் T ஒரு தன்இணைபுச் செயலி.

இந்தத் தேற்றத்திலிருந்து அனைத்துத் தன் இணைபுச் செயலிகளின் கணத்தில் வரிசைத் தொடர்பு (Order relation) வரையறை செய்ய முடிகிறது. அதாவது A_1, A_2 என்ற இரண்டு தன் இணைபுச் செயலி, அனைத்து x-களுக்கும் $(A_1 x, x) \le (A_2 x, x)$ என்றிருக்குமாயின் இதனை $A_1 \le A_2$ என எழுதலாம். இந்தத் தொடர்பு பற்றிய முக்கியமான அடிப்படைத் தன்மைகளை அடுத்து வரும் தேற்றத்தில் காணலாம்.

தேற்றம் 17.7

H என்ற ஹில்பர்ட் வெளியின் மீது வரையினை செய்யப்படும் அனைத்து தன் இணைபுச் செயலிகளுடைய மெய் பானக் வெளி, ஒரு பகுதி வரிசைப்படுத்தப்பட்ட கணம் (Partially ordered set) ஆகும். இதன் நேரியல் கட்டமைப்பு மற்றும் வரிசைக் கட்டமைப்பு (Order structure) கீழ்க்கண்ட தன்மைகனால் தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளது.

(1) $A_1 \le A_2$ எனில், ஒவ்வொரு A-க்கும் $A_1 + A \le A_2 + A$ ஆகும்

(2) $A_1 \le A_2$ மற்றும் $\alpha \ge 0$ எனில் $\alpha A_1 \le \alpha A_2$ ஆகும்

நிறுவல்: தன் இணைபுச் செயலிகளில் உள்ள தொடர்பு தற்சுட்டு (Reflexive) மற்றும் உருமாற்று (Transitive) ஆகிய தன்மைகளை நிறைவு செய்யும் என்பதை எளிதில் காணலாம். நாம் இப்போது இந்தத் தொடர்பு எதிர்சமச் சீர்மை (Antisymmetric) யுடையது என நிறுவ வேண்டும் $A_1 \le A_2$ மற்றும் $A_2 \le A_1$ எனில், ஒவ்வொரு x-க்கும் $([A_1 - A_2]x, x) = 0$ ஆகும்

தேற்றம் 17.5- ன் படி $A_1 - A_2 = 0$ அல்லது $A_1 = A_2$

மேலும் $A_1 \le A_2$ எனில், ஒவ்வொரு x-க்கும்

$$
\begin{aligned}
(A_1 x, x) \le (A_2 x, x) &\Rightarrow (A_1 x, x) + (Ax, x) \le (A_2 x, x) + (Ax, x) \\
&\Rightarrow ([A_1 + A]\, x, x) \le ([A_2 + A]\, x, x) \\
&\Rightarrow A_1 + A \le A_2 + A
\end{aligned}
$$

இதேபோல $A_1 \le A_2$ எனும் போது $\alpha A_1 \le \alpha A_2, \alpha \ge 0$ எனவும் நிறுவலாம்.

தன் இணைபுச் செயலி A என்பது $A \ge 0$ எனும் போது **நேர்மச் செயலி** (Positive operator) எனப்படும். அதாவது $(Ax, x) \ge 0$ எனும் போது A என்பது நேர்மச் செயலி எனப்படும்.

தேற்றம் 1 7.8

A என்பது H-ன் மீது நேர்மச் செயலி எனில், I + A ஒருமையல்லாத (non singuler) செயலி ஆகும். குறிப்பாக, H-ன் மீது உள்ள ஏதாவது ஒரு செயலி T-க்கு $I + T^*T$ மற்றும் $I + TT^*$ என்பன ஒருமையல்லாத செயலி ஆகும்.

நிறுவல்: முதலில், I + A என்பது H-லிருந்து H-க்கு ஒன்றுக்கு ஒன்று தொடர்புடைய சார்பு என நிறுவ வேண்டும். அதற்காக, $(I + A)\, x = 0 \Rightarrow Ax = -x$

$$\Rightarrow (Ax, x) = (-x,x) = - \| x \|^2$$

அதாவது $- \| x \|^2 = (Ax,x) \geq 0 \Rightarrow x = 0$

இவற்றிலிருந்து $(I+A)x = (I+A)y$

$$\Rightarrow (I+A)(x-y) = 0$$

$$\Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

அடுத்ததாக $I + A$-ன் வீச்சு (Range) M, மூடியது (Closed) என நிறுவ வேண்டும். இப்போது $\| (I+A)x \|^2 = \| x \|^2 + \| A x \|^2 + 2 (Ax,x)$. இங்கு A நேர்மச் செயலி, எனவே, $\| x \| \leq \| (I + A) x \|$. இந்த சமனிலியிலிருந்து M முழுவெளி (Complete space) என நிறுவலாம். ஆனால் இங்கு H என்பது முழுவெளி. எனவே M என்பது மூடிய வெளி ஆகும். நாம் இந்த நிறுவலை M = H என முடிக்க வேண்டும். அவ்வாறில்லையெனில் x_0 என்ற பூச்சியமல்லாத திசையன் M-க்குச் செங்குத்தாக இருக்கும். இது $(x_0, (I + A) x_0) = 0 \Rightarrow \| x_0 \|^2 = - (Ax_0, x_0) \leq 0 \Rightarrow x_0 = 0$ என்பதற்கு முரண்பாடாகும். இத்துடன் தேற்றம் நிறைவுறுகிறது.

பயிற்சிக் கணக்குகள்

(1) $\mathscr{B}(H)$-லிருந்து $\mathscr{B}(H)$-க்கு வரையறை செய்யப்படும் இணைபுச் செயலி ஒன்றுக்கு ஒன்று தொடர்புடைய மேல் சார்பு (One to one onto map) என நிறுவுக.

(2) $\| TT^* \| = \| T \|$ என நிறுவுக.

18. இயல் மற்றும் அலகு நிலை செயலி (Normal and Unitary Operator)

H என்ற ஹில்பர்ட் வெளியில் வரையறை செய்யப்படும் செயலி N என்பது $NN^*=N^*N$ எனும் போது **இயல் செயலி** (Normal operator) எனப்படும். இது தொடர்பான மிகவும் அடிப்படையான சில தன்மைகள், (அதாவது பின்னால் தேவைப்படுகிற), பற்றி இந்தப் பகுதியில் காண்போம். ஒவ்வொரு தன்இணைபுச் செயலியும் இயல் செயலி ஆகும். மேலும் α என்பது ஒரு அளவன் எனில் αN என்பதும் ஓர் இயல் செயலி ஆகும்.

தேற்றம் 18.1

$\{N_k\}$ என்பது இயல் செயலிகளின் தொடர்வரிசை, $k \to \infty$ எனும்போது $N_K \to N$ எனில், N என்பதும் ஒரு இயல் செயலி.

நிறுவல்: $\{N_k\}$ இயல்செயலிகளின் தொடர்வரிசை, எனவே $N_k N_k^* = N_k^* N_k$

இப்போது $\| NN^* - N^* N\| = \| NN^* - N_k N_k^* + N_k N_k^* - N_k^* N_k + N_k^* N_k - N^* N \|$

$$\leq \|NN^* - N_k N_k^* \| + \| N_k^* N_k - N_k^* N_k \| + \| N_k^* N_k - N^* N \|$$

$$\leq \|NN^* - N_k N_k^* \| + \| N_k^* N_k - N^* N \| \to 0$$

எனவே $NN^* = N^*N$.

இந்தத் தேற்றத்திலிருந்து அடுத்தத் தேற்றம் நிறுவப்படுகிறது.

தேற்றம் 18.2

H-ன் மீது வரையறை செய்யப்படும் அனைத்து இயல் செயலிகளின் கணம் $\mathcal{B}$(H)- ல் மூடிய உட்கணமாக இருக்கும். இது அனைத்துத் தன் இணைபுச் செயலிகளின் கணத்தை உள்ளடக்கியிருக்கும்.

தேற்றம் 18.3

H-ன் மீது வரையறை செய்யப்படும் இயல் செயலிகள் N_1 மற்றும் N_2, ஒன்று மற்றொன்றின் இணைபுச் செயலியுடன் பரிமாற்று விதியை நிறைவு செய்யுமாறு இருக்குமானால் N_1+N_2 மற்றும் N_1N_2 -ம் இயல் செயலிகளாயிருக்கும்.

நிறுவல்: N_1, N_2 என்ற இயல் செயலிகள் H-ன் மீது $N_1N_2^* = N_2^*N_1 \Leftrightarrow N_2N_1^* = N_1^*N_2$ என்றவாறு இருக்கும் என்க. இப்போது

$$(N_1+N_2)(N_1+N_2)^* = (N_1+N_2)(N_1^*+N_2^*)$$
$$= N_1N_1^* + N_1N_2^* + N_2N_1^* + N_2N_2^*$$

மற்றும்

$$(N_1+N_2)^*(N_1+N_2) = (N_1^*+N_2^*)(N_1+N_2)$$
$$= N_1^*N_1 + N_1^*N_2 + N_2^*N_1 + N_2^*N_2$$

இவற்றிலிருந்து $(N_1+N_2)(N_1+N_2)^* = (N_1+N_2)^*(N_1+N_2)$

எனவே N_1+N_2 ஓர் இயல் செயலி ஆகும்.

மேலும் $(N_1N_2)(N_1N_2)^* = (N_1N_2)(N_2^*N_1^*)$

$$= N_1N_2^*N_2N_1^* = N_2^*N_1N_1^*N_2$$
$$= N_2^*N_1^*N_1N_2 = (N_1N_2)^*(N_1N_2)$$

எனவே N_1N_2 ஓர் இயல் செயலி ஆகும்.

வரையறைப்படி A –என்ற தன் இணைபுச் செயலி $A^*x = Ax$ என்ற சமனியை (Equiality) நிறைவு செய்கிறது. தன் இணைபுச் செயலியின் பெரும்பாலான தன்மைகள் இந்தச் சமனியைச் சார்ந்திருக்கவில்லை. ஆனால் $\|A^*x\| = \|Ax\|$ என்ற பலமில்லாத சமனியைச் சார்ந்திருக்கும். இது போன்ற தன்மைகளை இனிவரும் தேற்றங்களில் காணலாம்.

தேற்றம் 18.4

H-ல் T என்ற செயலி இயல்செயலியாக அமையத் தேவையான மற்றும் போதுமான கட்டுப்பாடு ஒவ்வொரு x-க்கும் $\|T^*x\| = \|Tx\|$ ஆகும்.

நிறுவல்: $\|T^*x\| = \|Tx\| \Leftrightarrow \|T^*x\|^2 = \|Tx\|^2$

$$\Leftrightarrow (T^*x, T^*x) = (Tx, Tx)$$
$$\Leftrightarrow (TT^*x, x) = (T^*Tx, x)$$

$\Leftrightarrow ((TT^* - T^*T)x, x) = 0$

$\Leftrightarrow TT^* - T^*T = 0$

$\Leftrightarrow TT^* = T^*T$

$\Leftrightarrow$ T என்பது இயல் செயலி.

தேற்றம் 18.5

H - ல் N என்பது இயல் செயலி எனில். $\| N^2 \| = \| N \|^2$ ஆகும்.

நிறுவல்: தேற்றம் 18.4 ன் படி H - ல் உள்ள ஒவ்வொரு x -க்கும்

$$\| N^2 x \| = \| NNx \| = \| N^*Nx \|$$

இவற்றிலிருந்து $\| N^2 \| = \| N^*N \|$. தேற்றம் 17.2–ன் படி

$\| N^*N \| = \| N \|^2$. எனவே $\| N^2 \| = \| N \|^2$.

T என்பது H –ன் மீது ஏதாவது ஒரு செயலி எனில், T^* என்பது அதன் இணைபுச் செயலி. $A_1 = (T+T^*)/2$ மற்றும் $A_2 = (T - T^*)/2i$ என்க. A_1, A_2 என்பன தன் இணைபுச் செயலி என்பதை எளிதில் நிறுவலாம். மேலும் $T = A_1 + A_2 i$ என்ற தன்மையுடையது. இங்கு A_1, A_2 என்பன முறையே T-ன் மெய், கற்பனைப் பகுதியாகும்.

தேற்றம் 18.6

H-ன் மீது T என்பது ஒரு செயலி. T இயல் செயலியாக அமையத் தேவையான மற்றும் போதுமான கட்டுப்பாடு அதன் மெய் மற்றும் கற்பனைப் பகுதிகள் பரிமாற்று தன்மையுடையதாகும்.

நிறுவல்: A_1, A_2 என்பன T–ன் மெய் கற்பனை பகுதிகள் எனில்,

$T = A_1 + iA_2, T^* = A_1 - iA_2$ ஆகும். இப்போது

$$TT^* = (A_1 + iA_2)(A_1 - iA_2) = A_1^2 + A_2^2 + i(A_2A_1 - A_1A_2)$$

$$T^*T = (A_1 - iA_2)(A_1 + iA_2) = A_1^2 + A_2^2 + i(A_1A_2 - A_2A_1)$$

இவற்றிலிருந்து $A_2 A_1 = A_1A_2$ எனும் போது $TT^* = T^*T$ என்பது தெளிவாகிறது. அதாவது $A_1A_2 = A_2A_1$ எனும் போது T ஒரு இணைபுச் செயலி ஆகும்.

மறுதலையாக, மேலே கூறப்பட்டவையிலிருந்து

$TT^* = T^*T$ எனும் போது $A_2A_1 - A_1A_2 = A_1A_2 - A_2A_1$

ஆகையால், $2A_2A_1 = 2A_1A_2$ எனவே $A_1A_2 = A_2A_1$

H–ன் மீது $UU^* = U^*U = I$ என்றவாறு உள்ள U என்ற செயலி அலகு நிலை (Unitary) செயலி எனப்படும். வரையறைபடி அலகு நிலை செயலி ஓர் ஒருமையல்லாத (Non-singular) செயலி ஆகும். இதனுடைய எதிர்மாறு செயலிகள் அதன் தன்இணைபுச் செயலிகளுக்கு சமமானவையாகும். இதனுடைய வடிவியல் தன்மைகள் அடுத்த தேற்றத்தில் காணலாம்.

தேற்றம் 18.7

H–ன் மீது T என்பது ஒரு செயலி. எனில், கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கட்டுபாடுகள் ஒன்றுக்கு ஒன்று சமமானவையாகும்.

1) $T*T = I$

2) அனைத்து x, y – களுக்கும் $(Tx, Ty) = (x, y)$

3) அனைத்து x– களுக்கும் $\|Tx\| = \|x\|$.

நிறுவல்: $(1) \Rightarrow (2)$. $T*T = I$ என்க.

எனவே $(T*Tx, y) = (x, y) \Rightarrow (Tx, Ty) = (x, y)$.

$(2) \Rightarrow (3)$ $(Tx,Ty) = (x,y)$ என எடுத்துக்கொள்வோம்

$y = x$ எனில், $(Tx,Ty) = (x,y) \Rightarrow \| Tx \|^2 = \| x \|^2$

$\Rightarrow \| Tx \| = \| x \|$

$(3) \Rightarrow (1)$ $\|Tx\| = \|x\| \Rightarrow \| Tx \|^2 = \| x \|^2$

$\Rightarrow (Tx,Tx) = (x,x) \Rightarrow (T^*x,Tx) = (x,x)$

$\Rightarrow ([T^*T\text{-}I]x, x) = 0$

$\Rightarrow T^*T = I.$

தேற்றம் 18.7–ல் அலகுநிலைச் செயலி நிறைவு செய்யும் தன்மை (3) சமயாப்புள்ள சம ஒப்புமைச் சார்பின் வரையறையாகும். அதாவது ஒரு அலகுநிலைச் செயலி சமயாப்புள்ள சம ஒப்புமைச் சார்பாகும். ஆனால் சாமயாப்புள்ள சம ஒப்புமைச் சார்புகள் யாவும் அலகுநிலைச் சார்பாக இருக்க வேண்டிய அவசியம் இல்லை. எடுத்துக்காட்டாக l_2–ன் மீது வரையறை செய்யப்படும் $T\{x_1, x_2....\} = \{0, x_2, x_3......\}$ என்ற செயலி சமயாப்புள்ள சமஒப்புமைச் சார்பு. ஆனால் அலகுநிலைச் சார்பல்ல. இவ்வற்றிலிருந்து கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தேற்றம் உருவாக்கப்படுகின்றது.

தேற்றம் 18.8

H–ன் மீது செயலி T ஒரு அலகுநிலைச் செயலியாக அமையத் தேவையான மற்றும் போதுமான கட்டுப்பாடு T என்பது H- லிருந்து H-க்குச் சமயாப்புள்ள சமஒப்புமைச் சார்பு ஆகும்.

நிறுவல்: T ஒரு அலகு நிலைச் சார்பு என்க. எனவே வரையறைப்படி T ஒரு மேல்கோர்த்தல் சார்பு ஆகும். மேலும் தேற்றம் 18.7-ன் படி ஒவ்வொரு x –க்கும் $\|T(x)\| = \|x\|$ என இருக்கும். எனவே T சமயாப்புள்ள சம ஒப்புமைச் சார்பு ஆகும்.

மறுதலையாக T என்பது சமயாப்புள்ள சமஒப்புமைச் சார்பு என்க. எனவே T–க்குத் தகுந்தாற்போல் T^{-1} இருக்கும். தேற்றம் 18.7-ன் படி $T^*T = I$ ஆதலால்

$(T^*T)T^{-1} = I\,T^{-1}$ அல்லது $T^* = T^{-1}$. எனவே $T^*T = TT^* = I$. ஆகவே T என்பது அலகு நிலைச் சார்பு ஆகும்.

19. வீழல் (Projection)

பகுதி 4ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள வரையறைப் படி பானக் வெளி B-ன் மீது வீழல் என்பது தன்னடுக்குச் (Idempotent) செயலி ஆகும். அதாவது $P^2 = P$. அந்தப் பிரிவில் ஒவ்வொரு வீழலும் B-ல் இரண்டு மூடிய உள்வெளிகளைக் கண்டுபிடிக்கப்பட்டதை அறிவோம். அதாவது $B = M \oplus N$ என்றவாறு P-ன் வீச்சு M மற்றும் வெற்றுக்கணம் N என்பன அந்தச் சோடி கணங்களாகும். மறுதலையாக M,N என்ற ஒரு சோடி மூடிய உட்கணங்கள், வீழல் P-ன் வீச்சு M-ஆகவும் வெற்றுக்கணம் N-ஆகவும் உள்ள வீழலை உருவாக்குகிறது. இந்த வழியில் B-யின் மீது உள்ள வீழலுக்கும், B-ஐ உருவாக்குகின்ற ஒரு சோடி மூடிய வெளிகளுக்கும் இடையே ஒன்றுக்கு ஒன்று தொடர்பு இருப்பது தெளிவாகிறது. இந்தப்பகுதியின் முதல் தேற்றம் வீழலின் சிறப்பியல்பு பற்றியதாகும்.

தேற்றம் 19.1

P- என்பது H-ன் மீது M-ஐ வீச்சாகவும் N-ஐ வெற்று வெளியாகவும் உடைய வீழல். மேலும் $M \perp N \Leftrightarrow P$ ஒரு தன் இணைபுச் செயலி. மேலும் இந்த வகையில் $N = M^{\perp}$

நிறுவல்: P என்பது வீச்சு M மற்றும் வெற்று வெளி N உடைய H-ன் மீது வீழல் ஆகும். $M \perp N$ என்க. எனவே $H = M \oplus N$. எனவே H-ல் உள்ள ஒவ்வொரு z ஐயும் ஒரே ஒரு வழியில் $z = x + y, x \in M, y \in N$ எனக் குறிப்பிடலாம். மேலும் $Pz = x$. இப்போது

$$\begin{aligned}(Pz, z) &= (x, z)\\ &= (x, x + y)\\ &= (x, x) + (x, y)\end{aligned}$$

எனவே $(Pz, z) = (x, x)$

மேலும் $(P^*z, z) = (z, Pz) = (z, x)$

$$\begin{aligned}&= (x+y, x)\\ &= (x, x) + (y, x)\end{aligned}$$

எனவே $(P^*z, z) = (x, x)$

இவற்றிலிருந்து $(Pz,z) = (P^*z,z), z \in H$ எனக் கிடைக்கும். எனவே $P = P^*$. அதாவது வீழல் P என்பது தன் இணைபுச் செயலி.

மறுதலையாக $P = P^*$ என எடுத்துக்கொள்வோம். மேலும் $x \in M, y \in N$ எனில் $(x,y) = (Px,y) = (x,P^*y) = (x,Py) = (x,0) = 0$ இவற்றிலிருந்து $M \perp N$ என்பது நிறுவப்படுகிறது. இறுதியாக $N = M^{\perp}$ என நிறுவவேண்டும். இங்கு $M \perp N$ எனவே $x \perp N, x \in M$ அதனால் $N \subseteq M^{\perp}$. இங்கு N என்பது $M^{\perp}$ ன் முறையான உட்கணமாக

இருக்குமானால் அதற்குத் தகுந்தாற்போல் z_0 என்ற பூச்சியமில்லா திசையன் $z_0 \perp N$ என்றவாறு $M^{\perp}$–ல் இருக்கும். $z_0 \in M^{\perp}$ ஆதலால் $z_0 \perp M$. எனவே $z_0 \perp M + N$. மேலும் $H = M \oplus N$ என்பதால் $z_0 \perp H$. இது ஒரு முரண்பாடாகும். எனவே $N = M^{\perp}$.

மேலே உள்ள தேற்றத்தின் படி H-ன் மீது உள்ள வீழல் P-யின் வீச்சு மற்றும் வெற்று வெளி செங்குத்தாக இருப்பதால் சில நேரங்களில் இந்த வீழல் செங்குத்து வீழல் (Perpendicular Projection) எனவும் அழைக்கப்படும். ஹில்பர்ட் வெளிக் கோட்பாட்டில் எடுத்துக்கொள்ளப்படும் ஒரே வீழல் செங்குத்து வீழல்தான். ஆனால் எப்போதுமே செங்குத்து வீழலை, வீழல் என்றே குறிப்பிடப்படும். தேற்றம் 19.1-ன் படி P என்ற செயலி, $P^* = P$ மற்றும் $P^2 = P$ என்ற கட்டுப்பாடுகளை நிறைவு செய்யுமானால் அது வீழல் எனவும் வரையறை செய்யலாம். செயலி O மற்றும் I என்பன வீழல்களாகும்.

H–ன் மீது ஒவ்வொரு வீழலுக்கும் அதனுடைய வீச்சு $M = \{Px : x \in H\}$ ஒரு மூடிய நேரியல் உள்வெளி ஆகும். மறுதலையாக ஒவ்வொரு மூடிய நேரியல் வெளி M–க்கும் அதற்குத் தகுந்தாற்போல் P என்ற வீழலின் வீச்சு M ஆகவும் $P(x + y) = x, x \in M, y \in M^{\perp}$ எனவும் இருக்கும்.

தேற்றம் 19.2

P என்பது M-ன் மீது வீழல் $\Leftrightarrow$ I - P என்பது $M^{\perp}$–ன் மீது வீழல்.

நிறுவல்: P என்பது M –ன் மீது வீழல் என்க. அதாவது $P^* = P$, $P^2 = P$. நாம் இப்போது I - P என்பது $M^{\perp}$–ன் மீது வீழல் என நிறுவ வேண்டும். அதற்காக

$$(I-P)^2 = (I-P)(I-P)$$
$$= I - P - P + P^2$$
$$= I - P$$

மேலும் $(I - P)^* = I^* - P^* = I - P$

எனவே, I - P என்பது ஒரு வீழல்.

N என்பது I - P–ன் வீச்சு எனில் $N = M^{\perp}$ என நிறுவவேண்டும்.

$$x \in N \Rightarrow (I - P)x = x$$
$$\Rightarrow x - Px = x$$
$$\Rightarrow Px = 0$$

எனவே $x \in M^{\perp}$. அதனால் $N \subseteq M^{\perp}$

மேலும் $x \in M^{\perp}$ என்க. ஆதலால் $Px = 0 \Rightarrow x - Px = x$

$$\Rightarrow (I - P)x = x$$

எனவே x என்பது I - P –ன் வீச்சில் இருக்கும்.

அதாவது $x \in N$. எனவே $M^{\perp} \subseteq N$. இவற்றிலிருந்து $N = M^{\perp}$. ஆகவே $M^{\perp}$ –ன் மீது I - P ஒரு வீழல் ஆகும்.

மறுதலையாக, $I - P$ என்பது $M^{\perp\perp}$ன் மீது வீழல் என்க. எனவே $I - (I - P)$ என்பது $M^{\perp\perp} = M$-ன் மீது வீழல் ஆகும். அதாவது P என்பது M-ன் மீது ஒரு வீழல் ஆகும்.

T என்பது H-ன் மீது ஒரு செயலி. M என்பது H-ன் மூடிய நேரியல் உள்வெளி. $T(M) \subseteq M$ எனும் போது M என்ற மூடிய நேரியல் வெளி T-யினால் **மாறாதது** (In variant under T) எனப்படும்.

$M, M^{\perp}$ ஆகிய இரண்டு நேரியல் உள்வெளிகளும் T- ஆனால் மாறாதவை எனில் T என்பது M-ஆல் **சுருக்கப்பட்டது** (*T* is reduced by M) அல்லது M என்பது T-ஐச் சுருக்குகிறது (*M reduces T*) எனக் கூறலாம்.

இந்த வரையறைகளைப் பயன்படுத்திக் கீழே உள்ள தேற்றங்களை நிறுவலாம்.

தேற்றம் 19.3

H என்ற ஹில்பர்ட் வெளியின் நேரியல் உள்வெளி M, செயலி T-யினால் மாறாததாக அமையத் தேவையான மற்றும் போதுமான கட்டுப்பாடு வெளி $M^{\perp}$, செயலி T^*-யினால் மாறாததாகும்.

நிறுவல்: இங்கு $M^{\perp\perp} = M$ மற்றும் $T^{**} = T$. ஆதலால் சமச்சீர் அடிப்படையில் வெளி M செயலி T-யினால் மாறாதது எனில், $M^{\perp}$ என்பது செயலி T^* யினால் மாறாதது என நிறுவினால் போதுமானதாகும். $y \in M^{\perp}$ என்க. $T^* y$ என்பது $M^{\perp}$-ல் இருக்கும் என நிறுவவேண்டும். அதாவது M-ல் உள்ள ஒவ்வொரு x-க்கும் $(x, T^*y) = 0$ என நிறுவவேண்டும். இங்கு $(x, T^*y) = (Tx, y)$. ஆனால் M என்பது T-யினால் மாறாதவையாகையால், $(Tx, y) = 0$ ஆகும். எனவே $(x, T^*y) = 0$ அதாவது $M^{\perp}$ என்பது T^*-யினால் மாறாதாவையாகும்.

முந்தைய வரையறை மற்றும் தேற்றம் 19.3-ன் படி கீழ்க்கண்ட தேற்றத்தை மிக எளிதில் நிறுவலாம்.

தேற்றம் 19.4

H என்ற ஹில்பர்ட் வெளியில் உள்ள M என்ற மூடிய நேரியல் உள்வெளியால் T சுருக்கப்படுவதற்குப் தேவையான மற்றும் போதுமான கட்டுப்பாடு M என்பது T மற்றும் T^*-யினால் மாறாதது.

தேற்றம் 19.5

P என்பது H என்ற ஹில்பர்ட் வெளியில் உள்ள நேரியல் உள்வெளி M-ன் மீது வீழல் எனில், M என்பது செயலி T-யினால் மாறாததாக அமையத் தேவையான மற்றும் போதுமான கட்டுப்பாடு $TP = PTP$.

நிறுவல்: M என்பது T-யினால் மாறாதது மற்றும் x என்பது H-ல் ஏதாவது ஒரு திசையன் என்க. எனவே $Px \in M$. ஆதலால் $TPx \in M$. மேலும் $PTPx = TPx \in M$. எனவே $TP = PTP$. மறுதலையாக $TP = PTP$ என்க. $x \in M$ எனில், $Px \in M$ ஆகும். மேலும் $Tx = TPx$. அதாவது $Tx = TPx = PTPx \in M$. இவற்றிலிருந்து $Tx \in M$. ஆகவே M என்பது T -யினால் மாறாததாகும்.

தேற்றம் 19.6

M என்பது ஹில்பர்ட் வெளி H-யின் நேரியல் உள்வெளி. P-என்பது M-ன் மீது வீழல். செயலி T-ஐ M சுருக்குகிறது $\Leftrightarrow TP = PT$.

நிறுவல்: T-ஐ M- சுருக்குகிறது என எடுத்துக்கொள்வோம். எனவே M-என்பது T மற்றும் T*-னால் மாறாததாகும். ஆகவே $TP = PTP$ மற்றும் $T^*P = PT^*P$

$\Leftrightarrow$ $TP = PTP$ மற்றும் $(T^*P)^* = (PT^*P)^*$

$\Leftrightarrow$ $TP = PTP$ மற்றும் $P^*T = P^*TP^*$

$\Leftrightarrow$ $TP = PTP$ மற்றும் $PT = PTP$

$\Leftrightarrow$ $TP = PT$

நமது அடுத்த தேற்றம் ஹில்பர்ட் வெளியின் இரண்டு மூடிய நேரியல் உள்வெளிகள் செங்குத்தாக இருப்பதற்கு வீழல்கள் எவ்வாறு பயன்படுகின்றன என்பதை விளக்குகின்றது.

தேற்றம் 19.7

H-என்ற ஹில்பர்ட் வெளியின் இரண்டு நேரியல் உள்வெளிகள் M, N மீது முறையே P,Q வீழல்கள் எனில், $M \perp N \Leftrightarrow PQ = 0 \Leftrightarrow QP = 0$.

நிறுவல்: இங்கு P,Q என்பன முறையே M, N-ன் மீது வீழல்கள். எனவே $P^* = P$ மற்றும் $Q^*=Q$. மேலும் $PQ = 0 \Rightarrow (PQ)^* = 0 \Rightarrow Q^*P^* = 0 \Rightarrow QP = 0$. இவற்றிலிருந்து $M \perp N \Leftrightarrow PQ = 0$ என நிறுவினால் போதுமானதாகும்.

$M \perp N$ என எடுத்துக்கொள்வோம். எனவே $N \subseteq M^{\perp}$. H-ல் உள்ள ஒவ்வொரு x-க்கும் $Qx \in N$ அதாவது $Qx \in M^{\perp}$. இவற்றிலிருந்து $PQx = 0$, எனவே $PQ = 0$.

மறுதலையாக $PQ = 0$ என்க. எனவே N-ல் உள்ள ஒவ்வொரு x-க்கும் $Px = PQx = 0$. ஆதலால் $N \subseteq M^{\perp}$ எனவே $M \perp N$.

இந்தத் தேற்றத்திலிருந்து $PQ = 0$ எனில் P,Q என்ற வீழல்கள் **செங்குத்தான வீழல்கள்** எனப்படும்.

இந்தப் பகுதியின் இறுதித் தேற்றம், வீழல்களின் கூடுதல் ஒரு வீழல் என்பதையும் அதற்கான கட்டுப்பாடுகளையும் விளக்குகிறது.

தேற்றம் 19.8

ஹில்பர்ட் வெளி H–ன் மூடிய நேரியல் உள்வெளிகள் $M_1, M_2, M_3 \ldots\ldots M_n$ ஆகியவற்றின் மீது வரையறை செய்யப்படும் வீழல்கள் முறையே $P_1, P_2, P_3 \ldots P_n$ எனில் $P = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots\ldots + P_n$ என்பது $M = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots\ldots + M_n$ –ன் மீது வீழலாக அமையத் தேவையான மற்றும் போதுமான கட்டுப்பாடு $i \neq j$ எனும் போது $P_iP_j = 0$ ஆகும்.

நிறுவல்: இங்கு ஒவ்வொரு P_i –யும் வீழல். எனவே $P_i^2 = P_i$ மற்றும் $P_i^* = P_i$, $i = 1,2\ldots\ldots n$

மேலும் $P^* = (P_1 + P_2 + \ldots P_n)^* = P_1^* + P_2^* + \ldots\ldots + P_n^*$
$$= P_1 + P_2 + \ldots P_n$$
$$= P$$

அதாவது $P^* = P$

$i \neq j$ எனும் போது $P_iP_j = 0$ என்க.

$P^2 = (P_1 + P_2 + \ldots + P_n)(P_1 + P_2 + \ldots\ldots + P_n)$

$= P_1^2 + P_2^2 + \ldots P_n^2 = P_1 + P_2 + P_n = P$

அதாவது $P^2 = P$. எனவே P என்பது ஒரு வீழல். மறுதலையாக P என்பது H–ன் மீது வீழல் என்க. எனவே $(Pz, z) = (PPz, z)$

$$= (Pz, P^*z) = (Pz, Pz) = \|Pz\|^2$$

x- என்பது P_i –ன் வீச்சில் இருக்கும்போது $P_ix = x$. ஆதலால்

$$\|x\|^2 = \|P_ix\|^2 \leq \sum_{j=1}^{n}\|P_jx\|^2 = \sum_{j=1}^{n}(P_jx, x)$$
$$= (P_1x,x) + (P_2x,x) + \ldots\ldots + (P_nx,x)$$
$$= ((P_1 + P_2 + \ldots + P_n)x, x)$$
$$= (Px,x)$$
$$= \|Px\|^2 \leq \|x\|^2$$

இவற்றிலிருந்து $\sum_{j=1}^{n}\|P_jx\|^2 = \|P_ix\|^2$. மற்றும் $i \neq j$ எனும்போது $\|P_jx\| = 0$ ஆகும். இதன் பொருள் P_i –ன் வீச்சு P_j– னுடைய வெற்று வெளியில் இருக்கும். அதாவது ஒவ்வொரு $j \neq i$ –க்கும் $M_i \subseteq M_j^{\perp}$, $i \neq j$ எனும் போது $M_i \perp M_j$ ஆகும். முந்தைய தேற்றத்தின்படி P_i–கள் அனைத்தும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை ஆகும். அதாவது $j \neq i$ எனும் போது $P_iP_j = 0$. இறுதியாக P என்பது M –ன் மீது வீழல் என நிறுவ வேண்டும். $x \in M$ என்க. இங்கு $x = x_1 + x_2 \ldots\ldots x_n$, $x_i \in M$.

$\Rightarrow \|P_i x_i\|^2 = \| x_i \|^2$

$\Rightarrow P_i x_i = x_i,$

$\Rightarrow i = 1,2,\ldots.n$ எனில், x_i- என்பது P_i-ன் வீச்சில் இருக்கும்

$\Rightarrow x_1 + x_2 + +\ldots.x_n \in R(P)$, இங்கு $R(P)$ என்பது P-ன் வீச்சு.

$\Rightarrow x \in R(P)$

எனவே $M \subseteq R(P)$

மேலும் $x \in R(P)$ எனில் $(P_1 + P_2 + .. + P_n)\ x = x$

$\Rightarrow P_1 x + P_2 x \ldots.. + P_n x = x$

$\Rightarrow x \in M_1 + M_2 + \ldots..M_n$

$\Rightarrow x \in M$

எனவே $R(P) \subseteq M$. இவற்றிலிருந்து $M = R(P)$.

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1) T-என்பது H-என்ற ஹில்பர்ட் வெளியின் மீது அலகுநிலைச் செயலி (Unitary operator), $|\alpha| = |\beta|$ என்றவாறு உள்ள அளவன்கள் α , β எனில் $\alpha T + \beta T^*$ என்பது ஓர் இயல் செயலி.

2) H-ன் மீது T என்பது ஓர் இயல் செயலி மற்றும் λ-என்பது ஒரு அளவன் எனில் $T - \lambda I$ என்பது ஓர் இயல் செயலி ஆகும்.

3) H - என்பது முடிவுறு பருமன் கொண்ட ஹில்பர்ட் வெளி எனில், H -லிருந்து H -க்கு வரையறை செய்யப்படும் ஒவ்வொரு சமயாப்புள்ள சமஒப்புமைச் சார்பும் அலகு நிலைச் செயலி ஆகும்.

4) H- என்ற ஹில்பர்ட் வெளியின் மீது வரையறை செய்யப்படும் அனைத்து அலகு நிலைச் செயலிகளும் ஒரு குலம் (Group) ஆகும்.

5) H-ல் உள்ள M,N என்ற இரண்டு மூடிய நேரியல் உள்வெளிகள் மீது முறையே P,Q என்பன வீழல்கள் எனில், வீழல்கள் $PQ \Leftrightarrow$ வீழல்கள் $PQ = QP$.

6) P,Q என்பன முறையே H-னுடைய மூடிய நேரியல் உள்வெளிகள் M,N -ன் மீது வீழல்கள் எனில், கீழே கொடுக்கப்பட்டவை ஒன்றுக்கொன்று சமமானவை என நிறுவுக.

(i) $P \le Q$

(ii) $\|Px\| \le \|Qx\|$, x - ன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும்

(iii) $M \subseteq N$

(iv) $PQ = P$

(v) $QP = P$

பகுதி - 4

முடிவுறு பரிமாண நிறமாலைக் கோட்பாடு
(Finite dimensional spectral theory)

ஹில்பர்ட் வெளி H- ல் T–என்ற செயலில் $Tx = \lambda x$ - (1)

என்றவாறு வரையறை செய்யப்படுகிறது. இங்கு λ என்ற அளவன் மதிப்புக்கு (1) –ஐ நிறைவுசெய்யும் பூச்சியமற்ற திசையன் x என்பது T–ன் ஐகன் திசையன் (Eigen Vector) எனப்படும். மேலும் λ–ன் மதிப்பு ஐகன் மதிப்பு (Eigen Value) எனப்படும். ஒவ்வொரு ஐகன் திசையனுக்கும் அதற்குத் தகுந்தாற்போல் ஒரே ஒரு ஐகன் மதிப்பு இருக்கும். ஒவ்வொரு ஐகன் மதிப்புக்கும் அதற்குத் தகுந்தாற்போல் ஒன்று அல்லது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட ஐகன் திசையன் இருக்கும். வரையறைப்படி ஐகன் திசையன் என்பது ஒரு பூச்சியமற்ற திசையன் ஆகும்.

λ–என்பது T–ன் ஐகன் மதிப்பு என்க. λ–க்கு தகுந்தாற்போல் உள்ள T–ன் அனைத்து ஐகன் திசையன்கள் பூச்சிய திசையனுடன் இணைந்து உருவாகும் கணம் M- என்க. இங்குப் பூச்சிய திசையன் ஐகன் மதிப்பு அல்ல என்பது குறிப்பிடத்தக்கது. எனவே M–என்பது

$(T-\lambda I)\, x = 0$ - (2)

என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் அனைத்து திசையன்களின் கணம் ஆகும். இதனை ஐகன் வெளி (Eigen Space) எனவும் அழைக்கலாம். மேலும், இது H–ல் மூடிய நேரியல் வெளி என்பதை எளிதில் நிறுவலாம். M–என்பது T–யினால் மாறாதவை என்பது வெளிப்படையானதாகும்.

H–ல் உள்ள ஒவ்வொரு செயலி T–க்கும் ஐகன் மதிப்பு உள்ளதா எனக் கேட்கும்போது இல்லை என்றே பதில் வரும். எடுத்துக்காட்டாக l_2 என்ற ஹில்பர்ட் வெளியில் $T\{x_1, x_2 \ldots\ldots\} = \{0, x_1, x_2 \ldots\ldots\}$ என்றவாறு வரையறை செய்யப்படும் T- என்ற செயலி பூச்சியத்தைத் தவிர வேறு எந்தத் திசையன் x–க்கும் $\{0, x_1, x_2 \ldots\ldots\} = \{\lambda x_1, \lambda x_2 \ldots\ldots\}$ என்று இருக்காது. இதன் பொருள் யாதெனில் T–க்கு ஐகன் மதிப்பு இருக்காது என்பதாகும்.

கீழே சில கருதுகோள்களை எடுத்துக்கொள்வோம். அவற்றின் உண்மைத் தன்மைகளைப் பின்னர் காணலாம்.

(a) T என்ற செயலி λ_1, λ_2 .... λ_n என்ற வெவ்வேறு ஐகன் மதிப்புகளையும் அதற்குத் தகுந்தாற்போல் உள்ள ஐகன் வெளிகள் $M_1, M_2 \ldots\ldots M_n$ -யும் கொண்டவையாகும்.

(b) M_i, $i = 1,2\ldots\ldots n$ என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவையாகும். அதாவது $i \neq j$ எனும் போது $M_i \perp M_j$

(c) M_i, $i = 1, 2,\ldots n$ என்ற ஐகன் வெளிகள் H-ஐ உருவாக்கும்.

இந்தக் கருதுகோள்களின் உண்மைத் தன்மையை ஆராய்வதற்கு முன்னர் இதனால் ஏற்படும் விளைவுகளைக் காணலாம்.

கருதுகோள் (c) -ன் படி $H = M_1 + M_2 + \ldots\ldots M_n$

கருதுகோள் (b) -ன் படி $M_i \perp M_j$, $i \neq j$ எனவே $H = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots\ldots M_n$ அதாவது H-ல் உள்ள ஒவ்வொரு திசையன் x-யும் $x = x_1 + x_2 + \ldots\ldots x_n$, $x_i \in M_i$ - (3)
என ஒரே ஒரு வகையில் எழுதலாம்.

கருதுகோள் (a) -யின் படி

$$Tx = Tx_1 + Tx_2 + \ldots\ldots Tx_n$$
$$= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots\ldots + \lambda_n x_n \qquad - \quad (4)$$

இந்த முடிவினை ஐகன் வெளி M_i -ன் மீது உள்ள வீழல் P_i-வாயிலாக விவரிக்கலாம். தேற்றம் 19.7-ன் படி (b)-ஐ $i \neq j$ எனும் போது P_i என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை எனவும் கூறலாம். எனவே ஒவ்வொரு $i \neq j$-க்கும் $M_j \perp M_i$ எனில் சமன்பாடு (3) லிருந்து $P_i x = x_i$
எனலாம். இவற்றிலிருந்து

$$Ix = x_1 + x_2 + \ldots\ldots x_n$$
$$= P_1 x + P_2 x + \ldots\ldots P_n x$$
$$= (P_1 + P_2 + \ldots P_n)\, x$$

அதாவது $$I = P_1 + P_2 + \ldots\ldots P_n \qquad - \quad (5)$$

சமன்பாடு (4)- லிருந்து H- உள்ள ஒவ்வொரு x-க்கும்

$$Tx = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots\ldots + \lambda_n x_n$$
$$= \lambda_1 P_1 x + \lambda_2 P_2 x + \ldots\ldots + \lambda_n P_n x$$
$$= (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots\ldots + \lambda_n P_n) x$$

அதாவது $$T = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots\ldots + \lambda_n P_n \qquad - \quad (6)$$

சமன்பாடு (6) ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள T-ன் நேரியல் சேர்க்கை(Linear combination) யானது T-ன் **நிறமாலை கூறாக்கம்** (Spectral resolution) எனப்படும். எப்பொழுதெல்லாம் இந்தச் சொல் பயன்படுத்தப்படுகின்றதோ அப்போதெல்லாம் அனைத்து λ_i -களும் வெவ்வேறானவை எனவும் $I = P_1 + P_2 + \ldots P_n$, P_i -கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை எனவும் எடுத்துக் கொள்ளலாம். இந்த நிறமாலை கூறாக்கம் ஒரே ஒரு வகையில் இருக்கும்.

செயலி T கட்டுப்பாடுகள் (a), (b) மற்றும் (c) -ஐ நிறைவு செய்யுமானால் T-க்கு நிறமாலை கூறாக்கம் இருக்கும் என்பதைப் பார்த்தோம். ஆனால் H-ல் உள்ள ஒவ்வொரு செயலியும் இந்தக் கட்டுப்பாடுகளை நிறைவு செய்யும் என நம்புவது மிகவும் தவறானதாகக் கூட அமையலாம். எனவே T-ன் மீது எந்த விதமான கட்டுப்பாட்டைத் திணிப்பது என்ற கேள்வி எழுகிறது. இந்தக் கேள்விக்கு மிகவும் எளிதில் பதில் கூறிவிட முடியும். அதாவது T ஒரு இயல் செயலி (Normal Operator) யாக இருக்கும் போது T-க்கு நிறமாலைக் கூறாக்கம் இருக்கும் என நிறுவுலாம். இதற்காக ,

$$T^* = \bar{\lambda}_1 P_1 + \bar{\lambda}_2 P_2 + \ldots\ldots\ldots \bar{\lambda}_n P_n \text{ எனில்,}$$

$$TT^* = (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_n P_n)(\bar{\lambda}_1 P_1 + \bar{\lambda}_2 P_2 + \ldots\ldots\ldots \bar{\lambda}_n P_n)$$
$$= |\lambda_1|^2 P_1 + |\lambda_2|^2 P_2 + \ldots\ldots\ldots + |\lambda_n|^2 P_n$$

இதேபோல, $T^*T = |\lambda_1|^2 P_1 + |\lambda_2|^2 P_2 + \ldots\ldots\ldots + |\lambda_n|^2 P_n$ எனவும் நிறுவலாம்.

இவற்றிலிருந்து $TT^* = T^*T$. இதனால் Tஎன்பது ஒரு இயல் செயலியாகும். எனவே H-ல் உள்ள ஒவ்வொரு இயல் செயலியும் கருதுகோள்கள் (a), (b) மற்றும் (c) -ஐ நிறைவு செய்யும் என நிறுவினால் செயலி T-க்கு நிறமாலைக் கூறாக்கம் இருக்கும் என்பது தெளிவாகிறது. இந்தப் பகுதியில் நமது குறிக்கோள் கருதுகோள்கள் (a), (b) மற்றும் (c) -ஐ நிறுவுவதேயாகும். அவ்வாறு நிறுவப்படும் தேற்றத்திற்கு நிறமாலைத் தேற்றம் எனப்படும்.

13 அணிகள் (Matrices)

நமது முதல் நோக்கமே H-ல் உள்ள ஒவ்வொரு செயலியும் ஐகன் மதிப்பைக் கொண்டதாக இருக்கும் என நிறுவதேயாகும். இதை அடைவதற்கு முன் அணிகளின் கோட்பாடுகள் பற்றிச் சில அடிப்படை தன்மைகளைக் காணலாம். அணிகளின் கோட்பாடுகள் பற்றிப் படிப்பவர்களுக்கு ஒரளவு அணிகளைப் பற்றித் தெரிந்திருந்தாலும் சில அடிப்படைத் தன்மைகளைக் கோடிட்டுக் காண்பது அவசியமாகிறது.

H என்பது முடிவுறு பரிமாணமுடைய ஹில்பர்ட் வெளி என்க. $B = \{e_1, e_2, \ldots\ldots e_n\}$என்பது வரிசைப்படுத்தப்பட்ட அடிக்கணம் (Ordered Basis) எனில், H-ல் உள்ள

ஒவ்வொரு திசையனையும் ஒரே ஒரு வகையில் e_i -களின் நேரியல் சேர்க்கையாக எழுதலாம். T என்பது H-ன் மீது ஒரு செயலி எனில் B-ல் உள்ள ஒவ்வொரு e_j -யும்

$$Te_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i \qquad - \qquad (1)$$

என எழுதலாம்.

இந்த வகையில் T-யினால் காணப்படும் n^2 எண்ணிக்கையுடைய அளவன் α_{ij} -யினால் ஒரு அணியினை உருவாக்கலாம். இந்த அணியானது அடிக்கணம் B-க்கு தொடர்புடைய T-ன் அணி எனப்படும். இதனை [T] எனக் குறிப்பிடலாம். அல்லது B-க்குத் தொடர்புடையாதலால் $[T]_B$ எனவும் குறிப்பிடலாம். இந்த அணியினை

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots\ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots\ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots\ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \qquad - \qquad (2)$$

என்ற சதுர அணியாக எழுதலாம். இங்கு α_{ij} என்பது i -வது நிறையும் j-வது நிரலும் சந்திக்கும் இடமாகும். இந்த அணியினைச் சுருக்கமாக $[T] = [\alpha_{ij}]$ எனவும் எழுதலாம். Te_j என்ற திசையனை $e_1, e_2, \ldots\ldots e_n$ ஆகியவற்றின் நேரியல் சேர்க்கையாக எழுதலாம். இந்த நேரியல் சேர்க்கையிலுள்ள கெழுக்கள் அணி [T]-ன் j-வது நிரல்களாக அமையும்.

ஒரு நிலையான அடிக்கணம் $B = \{e_1, e_2, \ldots\ldots e_n\}$-ஐ பயன்படுத்தி H-ல் உள்ள ஒவ்வொரு செயலி T-க்கும் $[T] = [\alpha_{ij}]$ என்ற அணியை உருவாக்கலாம். இதனடிப்படையில் $T \to [T]$ என்ற சார்பை $Te_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i$ என வரையறைசெய்யலாம்.

பூச்சிய செயலிக்குத் தகுந்தாற்போல் பூச்சிய அணி இருக்கும். இதே போல முற்றொருமை செயலி(Idendity Operator) க்குத் தகுந்தாற்போல் I என்ற முற்றொருமை அணி இருக்கும். இங்கு $I = [\delta_{ij}]$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

$T \to [T]$ என்ற சார்பு H-ன் மீது உள்ள அனைத்துச் செயலிகள் கணத்திலிருந்து அவற்றினால் உருவாக்கப்படும் அனைத்து அணிகளின் கணத்திற்கு ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடையதாகும்.

$x = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j$ எனில் $Tx = \sum_{j=1}^{n} \beta_j Te_j$

$$= \sum_{j=1}^{n} \beta_j \left(\sum_{i=n}^{n} \alpha_{ij} e_i \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{ij} \beta_j) e_i$$

இது, $T \to [T]$ என்பது ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடைய சார்பு என்பதைக் காட்டுகிறது. ஒவ்வொரு $[\alpha_{ij}]$ என்ற அணிக்கும் அதற்குத் தகுந்தாற்போல் $Te_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i$ என்றவாறு T என்ற செயலி H -ல் இருக்கும். எனவே $T \to [T]$ என்ற சார்பு ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடைய மேல் கோர்த்தல் சார்பு ஆகும்.

அடுத்ததாக இரண்டு அணிகளை எவ்வாறு கூட்டுவது, பெருக்குவது மற்றும் அணியினை அளவனால் எவ்வாறு பெருக்குவது என்பதைக் காணலாம். $[\alpha_{ij}], [\beta_{ij}]$ என்பன T_1, T_2–ன் அணிகள் எனில்

$$(T_1+T_2)e_j = T_1e_j + T_2e_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} e_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) e_i$$

என்ற கணக்கீட்டின் படி, $[\alpha_{ij} + \beta_{ij}] = [\alpha_{ij}] + [\beta_{ij}]$ - (3)

என வரையறை செய்யும் போது, $[T_1+T_2] = [T_1]+[T_2]$ என நாம் பெறலாம். இதே போல, $\alpha[\alpha_{ij}] = [\alpha\alpha_{ij}]$ என்ற வரையறையிலிருந்து $\alpha[T_1] = [\alpha T_1]$ - (4)

எனக் கிடைக்கும். மேலும்,

$$(T_1T_2)e_i = T_1(T_2e_i)$$

$$= T_1\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_{kj} e_i \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \beta_{kj} T_1 e_k$$

$$= \sum_{k=j}^{n} \beta_{kj} \left(\sum_{i=i}^{n} \alpha_{ik} e_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_{kj} \alpha_{ik} \right) e_i$$

இவற்றிலிருந்து, $[\alpha_{ij}]\ [\beta_{ij}] = [\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kj}]$ என்ற அணிகளின் பெருக்கல் வரையறையின் படி, $[T_1 T_2] = [T_1][T_2]$ - (5)
எனக் கிடைக்கும்.

சமன்பாடு (3) (4) மற்றும் (5)-ல் வரையறை செய்யப்பட்டுள்ள செயலிகள் அணிகளுக்கிடையே அடிப்படை அறமச்செயலிகள் (Algebraic operators) ஆகும்.

நாம் இப்போது நமது சிந்தனையைச் சிறிது மாற்றிப் பார்ப்போமானால், அதாவது $n \times n$ வரிசையுள்ள அனைத்து அணிகள் A_n எனில், சமன்பாடு (3), (4) மற்றும் (5)-ல் உள்ள வரையறைகளின் படி A_n ஒரு அறம அமைப்பு (Algebraic System) ஆகும். மேலும், இந்த வரையறைகளின் படி A_n என்பது முற்றொருமை உறுப்புடைய மெய்புனையெண் அறமம் (Complex Algebra) என்பதை எளிதில் நிறுவலாம். இந்த மெய்புனையெண் அறமம் n-படி உடைய மொத்த அணி அறமம்(Total Matrix Algebra) எனப்படும்.

நாம் இப்போது $\mathcal{B}(H)$ என்பது ஒரு அறமம் மற்றும் A_n-ன் வரையறை செய்யப்படும் அமைப்புகள், $T \to [T]$ என்ற ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடைய மேல்கோர்த்தல் சார்பு, A_n-ன் கூட்டல், பெருக்கல் மற்றும் அளவன் பெருக்கல் ஆகியவையும் $\mathcal{B}(H)$-ல் உள்ள அமைப்புகளுடன் ஒத்துப்போகின்றன என்பதை அறிகின்றோம். இவற்றிலிருந்து A_n-என்பது ஒரு அறமம் எனில், $T \to [T]$ என்பது $\mathcal{B}(H)$-லிருந்து A_n-க்குச் சமஒப்புமைச் சார்பு (Isomorphism) ஆகும். இதுவரை விவரிக்கப்பட்ட கருத்துக்களை கீழ்க்கண்ட தேற்றமாகக் கூறலாம்.

தேற்றம் 20.1

$B=\{e_1, e_2, \ldots\ldots e_n\}$ என்பது H-ன் அடிக்கணம் எனில், $T \to [T]$ என்ற சார்பு அறமம் $\mathcal{B}(H)$ -லிருந்து மொத்த அணி அறமம் A_n-க்கு சமஒப்புமை மேல்ச் சார்பு ஆகும்.

தேற்றம் 2 0.2

B என்பது H -ன் அடிக்கணம் மற்றும் செயலி T-ன் B தொடர்புடைய அணி $[\alpha_{ij}]$ என்க. T ஒரு அருநிலையற்ற (Non Singular) செயலியாக அமையத் தேவையான மற்றும் போதுமான கட்டுப்பாடு $[\alpha_{ij}]$ ஒரு அருநிலையற்ற அணி ஆகும். மேலும், $[\alpha_{ij}]^{-1} = [T^{-1}]$.

நிறுவல்: T அருநிலையற்ற செயலி எனில, அதற்குத் தகுந்தாற்போல் T^{-1} என்ற செயலி

$$TT^{-1} = T^{-1}T = I \qquad (6)$$

எனஇருக்கும். தேற்றம் 20.1-ல் உள்ள சம ஒப்புமைச் சார்பு, சமன்பாடு (6) ஐ அணிச் சமன்பாடு $[T][T^{-1}] = [T^{-1}][T] = [I]$ என மாற்றும். இது $[\alpha_{ij}][T^{-1}] = [T^{-1}][\alpha_{ij}] = [I]$ -க்கு சமமானவையாகும். இவற்றிலிருந்து $[\alpha_{ij}]^{-1} = [T^{-1}]$ என நிறுவலாம்.

T என்பது H-ன் மீது ஒரு நிலையான செயலி எனில், B-என்ற அடிக்கணத்திற்குத் தொடர்புடைய T-ன் அணி $[T]_B$ என்பது அடிக்கணம் B-யைச் சார்ந்ததாகும். அடிக்கணம் B மாறும்போது அணி $[T]_B$ எவ்வாறு மாறும் என்பதைப் பின்வரும் தேற்றத்தில் காணலாம்.

$[\alpha_{ij}]$ மற்றும் $[\beta_{ij}]$ என்ற இரு அணிகளுக்குத் தகுந்தாற்போல்

$$[\beta_{ij}] = [\gamma_{ij}]^{-1}[\alpha_{ij}][\gamma_{ij}] \qquad (7)$$

என்றவாறு ஒரு அருநிலையில்லா அணி (Non Singular Matrix) $[\gamma_{ij}]$ இருக்குமானால் $[\alpha_{ij}]$, $[\beta_{ij}]$ என்ற அணிகள் **வடிவொத்த அணிகள்** (Similar matrices) எனப்படும்.

தேற்றம் 20.3

A_n -ல் உள்ள இரு அணிகள் வடிவொத்த அணிகளாக அமையத் தேவையான மற்றும் போதுமான கட்டுப்பாடு அவை ஒரே செயலியின் வெவ்வேறு அடிக்கணங்களுக்குத் தொடர்புடைய அணிகளாக அமையும்.

நிறுவல்: $B = \{e_1, e_2, \ldots\ldots e_n\}$, $B^1 = \{f_1, f_2, \ldots\ldots f_n\}$ என்பன H-ன் இரு அடிக்கணங்கள் என்க. T என்பது H-ன் மீது உள்ள செயலி எனில் B, B^1 -க்கு தொடர்புடைய அணிகள் முறையே $[T]_B, [T]_{B^1}$ என்க. A என்ற அருநிலையில்லா செயலி $Ae_i = f_i$ என்றவாறு H-ல் வரையறை செய்வோம். $[T]_B = [\alpha_{ij}]$ $[T]_{B^1} = [\beta_{ij}]$ எனில், $Te_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i$ மற்றும் $Tf_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} f_i$ ஆகும். $[\gamma_{ij}]$ என்பது B-க்குத் தொடர்புடைய A-ன் அணி என்க.

ஆதலால் $Ae_j = \sum_{k=1}^{n} \nu_{ij} e_i$ தேற்றம் 20.2-ன் படி $[\gamma_{ij}]$ என்பது அருநிலையில்லா அணி ஆகும். நாம் இப்போது Tf_j-ஐ இரு வெவ்வேறு முறைகளில் கணக்கிடுவோம்.

$$Tf_j = \sum_{k=1}^{n} \beta_{kj} f_k = \sum_{k=1}^{n} \beta_{kj} Ae_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \beta_{kj} \left(\sum_{i=1}^{n} \nu_{ik} e_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \nu_{ik} \beta_{kj} \right) e_i$$

மற்றும் $$Tf_j = TAe_j = T\left(\sum_{k=1}^{n} \nu_{kj} e_k \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \nu_{kj} Te_k$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \nu_{kj} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} e_k \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \nu_{kj} \right) e_i$$

இவற்றிலிருந்து $\sum_{k=1}^{n} r_{ik} \beta_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \nu_{kj}$. எனவே அனைத்து i, j -களுக்கும், $[\gamma_{ij}][\beta_{ij}] = [\alpha_{ij}][\gamma_{ij}]$ அல்லது $[\beta_{ij}] = [\gamma_{ij}]^{-1}[\alpha_{ij}][\gamma_{ij}]$ எனவே $[\alpha_{ij}]$, $[\beta_{ij}]$ வடிவொத்த அணிகள் ஆகும்.

மறுதலையாக $[\alpha_{ij}]$, $[\beta_{ij}]$ என்பன வடிவொத்த அணிகள் என்க. எனவே அதற்குத் தகுந்தாற்போல் $[\gamma_{ij}]$ என்ற அருநிலையில்லா அணி $[\beta_{ij}] = [\gamma_{ij}]^{-1}[\alpha_{ij}]$ $[\gamma_{ij}]$ என்றவாறு இருக்கும். $B = \{e_1, e_2, \ldots\ldots e_n\}$ என்பது H–ன் அடிக்கணம் என்க. இந்த அடிக்கணத்திற்குத் தொடர்புடைய செயலி T–ன் அணி $[T]_B = [{}_j\alpha_i]$ என்க. B-க்கு தொடர்புடைய செயலி A–ன் அணி $[A]_B = [\gamma_{ij}]$ என்க. ஒவ்வொரு செயலியும் ஒரு அடிக்கணத்தை மற்றொரு அடிக்கணமாக மாற்றும். எனவே $B^1 = \{Ae_1, Ae_2, \ldots\ldots Ae_n\}$ என்பது H–ன் மற்றொரு அடிக்கணம் ஆகும். நமது கருதுகோளின் படி $[T]_{B^1} = [\gamma_{ij}]^{-1}$ $[\alpha_{ij}]$ $[\gamma_{ij}] = [\beta_{ij}]$. எனவே $[\alpha_{ij}]$, $[\beta_{ij}]$ என்பன வெவ்வேறு அடிக்கணங்களைப் பொறுத்து T–ன் அணிகள் ஆகும்.

21. அணிக்கோவை மற்றும் செயலியின் நிறமாலை
(Determinants and the spectrum of an operator)

அணிக்கோவை என்பது தொடக்கநிலை கணிதத்தில் கணக்கிடும் கருவியாகவே பயன்படுத்தப்பட்டு வந்தது. பின்னர் நேரியல் சமன்பாடுகளை உள்ளடக்கிய எண்மானக் கணக்குகளைத் தீர்வு காண்பதற்கு மிகவும் சிறந்ததொரு கருவியானது.

மேலும் இது, ஒரு அணியை, அருநிலை அணி (Singular Matrix) மற்றும் (Non Singular Matrix) அருநிலையில்லா அணி என வேறுபடுத்திக் காண்பதற்கும் உதவுகின்றது.

அணிக்கோவையின் கோட்பாட்டை விரிவுபடுத்துவதற்கு இது பொருத்தமான இடம் அல்ல, படிப்பவர்களுக்கு ஏற்கனவே அணிக்கோவையைப்பற்றி ஓரளவு தேவையான அளவுக்கு அடிப்படை அறிந்திருந்தாலும், இங்கு நமக்குத்தேவையான கோட்பாட்டிற்குத் தொடர்புடைய சில அடிப்படை வரையறைகளைக் காணலாம்.

$[\alpha_{ij}]$ என்பது n வரிசையுள்ள சதுர அணி (Square matrix) என்க. இதன் அணிக்கோவையை $\det([\alpha_{ij}])$ எனக்குறிப்பிடலாம். இது ஒரு அளவன் ஆகும். எனவே அணிக்கோவைச் சார்பு என்பது அணிகளின் அளவன் மதிப்புச் சார்பு ஆகும். பொதுவாக ஒரு அணி $[\alpha_{ij}]$ -ன் அணிக்கோவையைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$\det([\alpha_{ij}]) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

அணிக்கோவையின் தன்மைகள் சிலவற்றைக் கீழே காணலாம்.

(i) $\det([\delta_{ij}]) = 1$

(ii) $\det([\alpha_{ij}][\beta_{ij}]) = \det([\alpha_{ij}]) \det([\beta_{ij}])$

(iii) $\det([\alpha_{ij}]) \neq 0 \Leftrightarrow [\alpha_{ij}]$ என்பது அருநிலையில்லா அணி

(iv) $\det([\alpha_{ij}] - \lambda\,[\delta_{ij}])$ என்பது λ-வை மாறி (Variable) யாகவும், மெய்புனையெண் கெழுக்களாகவும் கொண்ட n-படியுடைய பல்லுறுப்புக்கோவை (Polynomial) ஆகும்.

அடுத்துவரும் தேற்றம் வடிவொத்த அணிகளின் அணிக்கோவைகள் சம மதிப்புடையவை என்பதை நிறுவுகின்றது.

தேற்றம் 21.1

B, B^1 என்பன H-ன் அடிக்கணங்கள். T என்பது H-ன் மீது செயலி. B, B^1-க்குத் தொடர்புடைய T-ன் அணிகள் முறையே $[\alpha_{ij}]$, $[\beta_{ij}]$ எனில், $\det([\alpha_{ij}]) = \det([\beta_{ij}])$ ஆகும்.

நிறுவல்: இங்கு $[\alpha_{ij}]$, $[\beta_{ij}]$ என்பன முறையே B, B^1-க்குத் தொடர்புடைய T–ன் அணிகள். எனவே இவை வடிவொத்த அணிகள். ஆதலால், இதற்குத் தகுந்தாற்போல் $[\gamma_{ij}]$ என்ற அருநிலையில்லா அணி $[\beta_{ij}] = [\gamma_{ij}]^{-1}[\alpha_{ij}][\gamma_{ij}]$ என்றவாறு இருக்கும்.

இவற்றிலிருந்து $\det([\beta_{ij}]) = \det([\gamma_{ij}]^{-1}[\alpha_{ij}][\gamma_{ij}])$

$$= \det([\gamma_{ij}]^{-1}) \det([\alpha_{ij}]) \det([\gamma_{ij}])$$

$$= \det([\gamma_{ij}]^{-1}) \det([\gamma_{ij}]) \det([\alpha_{ij}])$$

$$= \det([\delta_{ij}]) \det([\alpha_{ij}])$$

$$= \det([\alpha_{ij}]).$$

இந்தத் தேற்றத்திலிருந்து T–ன் அணிக்கோவையை வரையறை செய்ய இயலும். அதாவது அணிக்கோவைச் சார்பு என்பது H –ன் மீது உள்ள செயலியின் அளவன் மதிப்பு சார்பாகும்.

இந்த அணிக்கோவைச் சார்பு கீழ்க்கண்ட தன்மைகளைக் கொண்டிருக்கும்.

(1) $\det(I) = 1$

(2) $\det(T_1 T_2) = \det(T_1)\det(T_2)$

(3) $\det(T) \neq 0 \Leftrightarrow T$ - என்பது அருநிலையில்லா செயலி

(4) $\det(T - \lambda I)$ என்பது λ ஐ மாறியாகவும் மெய்புனை எண்ணை கெழுக்களாகவும் உடைய n-படியுடைய பல்லுறுப்புக் கோவை.

T என்பது H –ன் மீது செயலி என்க. λ என்ற அளவன் T–ன் ஐகன் மதிப்பு எனில் அதற்குத் தகுந்தாற்போல் x–என்ற திசையன் $(T - \lambda I)x = 0$ என்றவாறு இருக்கும். அதாவது $T - \lambda I$ ஒரு அருநிலைச் செயலி. இவற்றிலிருந்து

அதாவது $\det(T - \lambda I) = 0$ - (1)

இந்தச் சமன்பாடு T–ன் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு (Characteristic equation) எனப்படும். இங்கு T–ன் ஐகன் மதிப்பு என்பது $\det(T - \lambda I) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் வெவ்வேறு மூலங்கள் ஆகும்.

$[\alpha_{ij}]$ என்பது B – என்ற அடிக்கணத்திற்கு தொடர்புடைய செயலி T–ன் அணி எனில் இதன் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \ldots\ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \ldots\ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots\ldots & \alpha_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ஆகும். இவற்றிலிருந்து, T–ன் ஐகன் மதிப்பு காண்பதற்குப் பதிலாகச் சமன்பாடு (1) –ன் மூலங்களைக் கண்டறிந்தால் போதுமானதாகும். தன்மை (iv)–ன் படி சமன்பாடு (1)–ன் மூலங்கள் மெய்புனையெண் மூலங்களாக இருக்கும். மேலும் அறமத்தின் அடிப்படைத் தேற்றத்தின்படி சமன்பாடு – (1) சரியாக n–மூலங்களைக் கொண்டிருக்கும். இவற்றில் சில மூலங்கள் சமமானவையாக இருக்கலாம். எனவே இந்த வகையில் வெவ்வேறான மூலங்கள் n - விடக் குறைவாக இருக்கும். மேலே கூறிய அனைத்துக் கருத்துக்களையும் உள்ளடக்கிக் கீழ்க்கண்ட தேற்றத்தை நிறுவலாம்.

தேற்றம் 21.2

H–ன் மீது T–என்பது ஏதாவது ஒரு செயலி எனில், T–ன் ஐகன் மதிப்புகள் மெய்புனையெண் தளத்தின் உட்கணமாக இருக்கும். மேலும் இந்தக் கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை H–ன் பரிமாணத்தை விட அதிகமாக இருக்காது.

செயலி T–ன் அனைத்து ஐகன் மதிப்புகளின் கணம் T–ன் **நிறமாலை** (Spectrum) எனப்படும். இதனை $\sigma(T)$ எனக் குறிப்பிடலாம்.

தேற்றம் 21.3

T என்பது H–என்ற முடிவுறு பரிமாணம் கொண்ட வெளியில் செயலி எனில், கீழே கொடுக்கப்பட்டவை உண்மையாகும்.

(1) T அருநிலை செயலி $\Leftrightarrow 0 \in \sigma(T)$

(2) T அருநிலையில்லா செயலி எனில், $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \lambda^{-1} \in \sigma(T^{-1})$

(3) A அருநிலையில்லா செயலி எனில், $\sigma(ATA^{-1}) = \sigma(T)$

(4) $\lambda \in \sigma(T)$ மற்றும் P ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை எனில், $P(\lambda) \in \sigma(P(T))$

நிறுவல்: (1) T ஒரு அருநிலை செயலி என்க. எனவே அதற்கு தகுந்தார்போல் $x \neq 0$ என்ற திசையன் $Tx = 0$ என இருக்கும். அதாவது $Tx = 0x \Rightarrow (T - 0I)x = 0$ எனவே $0 \in \sigma(T)$

மறுதலையாக $0 \in \sigma(T)$ எனில், அதற்குத் தகுந்தாற்போல் $x \neq 0$ என்ற திசையன் $(T - 0I)x = 0$ என இருக்கும். இவற்றிலிருந்து T–என்பது அருநிலை செயலி.
(2) $\lambda \in \sigma(T)$ என்க. எனவே H–ல் உள்ள ஒவ்வொரு $x \neq 0$-க்கும் $Tx = \lambda x$ ஆக இருக்கும். மேலும் T என்பது அருநிலையில்லாச் சார்பு, எனவே $T^{-1}(Tx) = T^{-1}(\lambda x)$

$$\Leftrightarrow x = \lambda T^{-1}(x)$$

$$\Leftrightarrow x/\lambda = T^{-1}(x)$$
$$\Leftrightarrow 1/\lambda \in \sigma(T^{-1})$$

(3) இங்கு Aஎன்பது அருநிலையில்லா செயலி, மேலும்

$$\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \det(T - \lambda I) = 0$$
$$\Leftrightarrow \det(A(T - \lambda I)A^{-1}) = 0$$
$$\Leftrightarrow \det((ATA^{-1}) - AA^{-1}(\lambda I)) = 0$$
$$\Leftrightarrow \det(ATA^{-1} - \lambda I) = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda \in \sigma(ATA^{-1})$$

(4) $\lambda \in \sigma(T)$ எனில் x = 0 எனும் போது $Tx = \lambda x$.

எனவே $T^2x = T(Tx) = T(\lambda x) = \lambda Tx = \lambda(\lambda x) = \lambda^2 x$

இதேபோல $T^3x = \lambda^3 x, T^4x = \lambda^4 x \ldots\ldots\ldots T^n x = \lambda^n x$ என நிறுவலாம். இவற்றிலிருந்து $P(T) = P(\lambda)$ இங்கு $P(T)$, $P(\lambda)$ என்பன பல்லுறுப்புக்கோவைகள்.

மேலும் $P(T)x = P(\lambda)x \Rightarrow (P(T)x - P(\lambda)x) = 0 \Rightarrow P(\lambda) \in \sigma(P(T))$

பயிற்சிக் கணக்குகள்

(1) H-ன் பரிமாணம் n எனில், $\mathcal{B}(H)$-ன் பரிமாணம் n^2 என நிறுவுக.

(2) θ என்பது நிலையான மெய்யெண் எனில்

$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ மற்றும் $\begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix}$ என்பன வடிவொத்த அணிகள் என நிறுவுக.

22. நிறமாலைத் தேற்றம்

இந்தப் பகுதியின் முக்கிய தேற்றமான, அதாவது நிறமாலைத் தேற்றத்திற்கு வந்துள்ளோம். இந்த தேற்றத்தை நிறுவுவதற்கு முன் சில அடிப்படைத் தேற்றங்களை நிறுவ வேண்டும்.

தேற்றம் 22.1

T என்பது ஓர் இயல் செயலி x என்பது ஐகன் மதிப்பு λ உடைய T–ன் ஐகன் திசையன் $\Leftrightarrow$ x என்பது $\bar{\lambda}$–ஐ ஐகன் மதிப்பாக கொண்ட T^*–ன் ஐகன்.

நிறுவல்: T என்பது ஓர் இயல் செயலி. எனவே $T-\lambda I$ என்பதும் ஓர் இயல் செயலி. இதன் இணைச் செயலி $T^* - \bar{\lambda} I$ –யும் ஓர் இயல் செயலி. தேற்றம் 18.4-ன் படி ஒவ்வொரு x –க்கும் $\|Tx - \lambda x\| = \|T^*x - \bar{\lambda}x\|$ ஆகும். இவற்றிலிருந்து x என்பது T –ன் ஐகன் திசையன் λ என்பது T–ன் ஐகன் மதிப்பு எனில்

$$Tx = \lambda x \Leftrightarrow \|Tx - \lambda x\| = 0 \Leftrightarrow \|T^* x - \bar{\lambda} x\| = 0 \Leftrightarrow T^* x = \bar{\lambda} x$$

எனவே x என்பது T^*-ன் ஐகன் திசையன் $\bar{\lambda}$ என்பது என்பது ஐகன் மதிப்பாகும்.

அடுத்த தேற்றம் ஐகன் வெளிகள் சோடி சோடியாகச் செங்குத்தானவை என்பதைக் கூறுகின்றன.

தேற்றம் 22.2

T ஓர் இயல் செயலி எனில் M_i -கள் சோடி சோடியாகச் செங்குத்தானவையாகும்.

நிறுவல்: i,j வெவ்வேறானவை, $x_i \in M_i$, $x_j \in M_j$ என்க. எனவே $Tx_i = \lambda_i x_i$ மற்றும் $Tx_j = \lambda_j x_j$ தேற்றம் 22.1-ன் படி $\lambda_i(x_i, x_j) = (\lambda_i x_i, x_j) = (Tx_i, x_j) = (x_i, T^* x_j)$

$$= (x_i, \bar{\lambda}_j x_j)$$
$$= \lambda_j(x_i, x_j)$$

இங்கு $\lambda_i \neq \lambda_j$ எனவே $(x_i, x_j) = 0$ இவற்றிலிருந்து $M_i \perp M_j$.

அடுத்ததாக T இயல் செயலி எனும்போது M_i -கள் H-ஐ உருவாக்கும் என நிறுவவேண்டும். இதற்காகக் கீழே கொடுக்கப்பட்ட தேற்றத்தை முதலில் நிறுவுவோம்.

தேற்றம் 22.3

T ஓர் இயல் செயலி எனில், ஒவ்வொரு M_i -யும் T -ஐச் சுருக்குகிறது.

நிறுவல்: ஒவ்வொரு M_i -யும் T-ஐப் பொறுத்து மாறாதது என்பது மிகவும் வெளிப்படையானதாகும். எனவே தேற்றம் 19.4-ன் படி M_i என்பது T^*-யினாலும் மாறாதவை என நிறுவினால் போதுமானதாகும். இந்த முடிவு உடனடியாகத் தேற்றம் 22.1 லிருந்து வெளிப்படுகின்றது. அதாவது x_i என்பது M_i-ல் ஒரு திசையன். ஆகவே $Tx_i = \lambda_i x_i$. இவற்றிலிருந்து $T^* x_i = \bar{\lambda} x_i$ என்பதும் M_i இருக்கிறது என்பதையும் காணலாம். அதாவது $T^*(M_i) \subseteq M_i$.

தேற்றம் 22.4

T ஓர் இயல் செயலி எனில் M_i-கள் H-ஐ உருவாக்குகின்றன.

நிறுவல்: M_i-கள் சோடி சோடியாக செங்குத்தானவை என்பதிலிருந்து தேற்றம் 19.7 மற்றும் 19.8-ன் படி $M = M_1 + M_2 + \ldots\ldots + M_n$ என்பது H-னுடைய மூடிய நேரியல் உள்வெளி மற்றும் அதனுடன் இயைந்த வீழல் $P = P_1 + P_2 + \ldots\ldots + P_n$ என அறியலாம். ஒவ்வொரு M_i-யும் T -ஐ சுருக்குகிறது. எனவே தேற்றம் 19.6-ன் படி ஒவ்வொரு P_i - க்கும் $TP_i = P_i T$. இவற்றிலிருந்து $TP = PT$. எனவே M-ம் T-ஐ சுருக்குகிறது. மேலும் T-னால் $M^\perp$ மாறாததாகும். $M^\perp \neq \{0\}$ எனில் T-யின் அனைத்து ஐகன் திசையன்களும் M -னுள் இருக்கின்ற காரணத்தினால், செயலி T-ஐ $M^\perp$ -ல் மட்டும் கட்டுப்படுத்தும்போது, அந்தச் செயலிக்கு முடிவுறு பரிமாண ஹில்பர்ட் வெளியில் ஐகன் திசையன் இருக்காது. எனவே ஐகன் மதிப்பும் இருக்காது. இது இயலாது என்பதை தேற்றம் 21.2 காட்டுகிறது. எனவே $M^\perp = \{0\}$. இவற்றிலிருந்து M = H. ஆகையால் M_i-க்கள் H -ஐ உருவாக்குகிறது.

நிறமாலைத் தேற்றம் 22.5 (Spectral Theorem)

T என்பது, முடிவுறு பரிமாண ஹில்பர்ட் வெளி H -ல், λ_1, λ_2 ……… λ_n ஆகியவற்றை ஐகன் மதிப்புகளாகக் கொண்ட செயலி, மற்றும் இதற்குத் தகுந்தாற்போல், முறையே $M_1, M_2, \ldots M_n$ என்பன ஐகன் வெளிகள் என்க. இந்த வெளிகளின் மீது முறையே $P_1, P_2, \ldots P_n$ வீழல்கள் எனில், கீழே கொடுக்கப்பட்டவை ஒன்றுக்கொன்று சமமானவையாகும்.

(1) M_i–கள் சோடி சோடியாக செங்குத்தானவை மற்றும் அவை H–ஐ உருவாக்கும்.

(2) P_i–கள் சோடி சோடியாக செங்குத்தானவை மற்றும் $I = P_1 + P_2 + \ldots + P_n$,

$T = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots \lambda_n P_n$

(3) T ஓர் இயல் செயலி

நிறுவல்: இந்தப் பகுதியின் தொடக்கத்தில் நிறுவப்பட்டுள்ள (a), (b), மற்றும் (c) யிலிருந்து $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ நிறுவப்படுகின்றது. மேலும் தேற்றம் 22.1 முதல் தேற்றம் 22.4 வரை இணைந்து $(3) \Rightarrow (1)$ நிறுவப்படுகின்றது.

தேற்றம் 22.6

T என்பது H–ல் இயல் செயலி. செயலி T–க்குத் தகுந்தாற்போல் ஓர் அலகுச் செங்குத்து அடிக்கணம் (Orthonormal basis) H–ல் அதற்குத் தொடர்புடைய T–ன் அணி, மூலைவிட்ட அணி (Diagonal matrix) யாக உள்ளவாறு இருக்கும்.

நிறுவல்: $T = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots \lambda_n P_n$ என்பது செயலி T–ன் நிறமாலைக் கூறாக்கம் (Spectral resolution). λ_1, λ_2 ……… λ_n என்பன T–ன் ஐகன் மதிப்புகள் மற்றும் M_1, $M_2, \ldots M_n$ முறையே λ_1, λ_1, λ_2 ……… λ_n–ன் ஐகன் வெளிகள். இந்த வெளிகளின் மீது முறையே P_1, P_2, …….. P_n என்பன வீழல்கள். மேலும் $I = P_1 + P_2 + \ldots + P$. இங்கு M_i–கள் சோடி சோடியாக செங்குத்தானவை. அதாவது $i \neq j$ எனும்போது $M_i \perp M_j$ ஒவ்வொரு M_i–யும் முடிவுறு பரிமாண ஹில்பர்ட் வெளி. எனவே B_i, i =1,2......n என்பன முறையே M_i = 1,2......n-ன் அலகுச் செங்குத்துக் கணம் என்க. மேலும்

$B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ என்க. நாம் இப்போது B என்பது H –ன் அலகுச் செங்குத்துக் அடிக்கணம் என நிறுவ வேண்டும். இங்கு $M_i \perp M_j$. எனவே ஒவ்வொரு $i \neq j$ –க்கும் $B_i \perp B_j$. ஆகவே B ஒரு அலகுச் செங்குத்துக் கணம் ஆகும். எனவே B ஒரு நேரியல் சார்பற்ற (Linearly independent) கணம். மேலும் H–ல் உள்ள ஒவ்வொரு x –ஐயும் B–ன் நேரியல் கலவையாக எழுதலாம் என நிறுவவேண்டும்.

$$x = Ix = P_1 x + P_2 x \ldots + P_n x$$

இங்கு $P_i x = x_i$, i =1,2,……..n எனவே

$$x = P_1 x + P_2 x + \ldots + P_n x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \; x_i \in M_i$$

M_i–ல் உள்ள ஒவ்வொரு திசையன் x_i–யும் B_i–ல் உள்ள திசையன்களின் நேரியல் கலவையாக எழுதலாம். எனவே H–ல் உள்ள ஒவ்வொரு x - ஐ, B–ல் உள்ள

திசையன்களின் நேரியல் கலவையாக எழுதலாம். B-ல் $e_1, e_2 \ldots\ldots e_n$ என்ற n-திசையன்கள் உள்ளதாக எடுத்துக்கொள்வோம். M_i-ல் உள்ள ஒவ்வொரு திசையனும் T-ன் ஐகன் திசையன். எனவே B-ல் உள்ள ஒவ்வொரு திசையனும் T-ன் ஐகன் திசையன். நாம் இப்போது B-க்குத் தொடர்புடைய T-ன் அணி மூலைவிட்ட அணி என நிறுவ வேண்டும். B-ல் உள்ள ஒவ்வொரு திசையனும் T-ன் ஐகன் திசையன். எனவே $Te_i = \lambda_i e_i, i = 1,2,\ldots.n$. எனவே

$$Te_1 = \lambda_1 e_1 + 0e_2 + \ldots\ldots.0e_n,$$

$$Te_2 = 0e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots\ldots.0e_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Te_n = 0e_1 + 0e_2 + \ldots\ldots.\lambda_n e_n$$

வரையறைப்படி

$$[T]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots. & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots. & 0 \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ 0 & 0 & \ldots. & \lambda_n \end{bmatrix}$$

பயிற்சிக் கணக்குகள்

(1) முடிவுறு பரிமாண வெளியின் மீத உள்ள இயல் செயலியின் நிறமாலைக் கூறாக்கம் $T = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots\ldots\ldots \lambda_n P_n$-ஐ ஒரே ஒரு முறையில் எழுதாலாம் என நிறுவுக.

(2) H-ன் மீது T இயல் செயலியாக அமையத் தேவையான மற்றும் போதுமான கட்டுப்பாடு அதன் இணைச்செயலி T* என்பது T-ஐ மாறியாகக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை ஆகும்.

(3) H -ன் மீது Tஎன்பது ஏதாவது ஒரு செயலி, N-என்பது இயல் செயலி என்க. T, N பரிமாற்று விதியை நிறைவு செய்யுமெனில். T*, N*-ம் பரிமாற்று விதியை நிறைவு செய்யும்.

(4) T என்பது $\{\lambda_1, \lambda_2 \ldots\ldots\ldots \lambda_n\}$ஆகியவற்றை நிறமாலையாகக் கொண்ட ஓர் இயல் செயலி எனில். T-ன் நிறமாலை கூறாக்கத்தைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக.

(அ) T என்பது தன் இணை புச்செயலி $\Leftrightarrow$ ஒவ்வொரு λ_i மெய்யெண்

(ஆ) T- என்பது நேர்மச் செயலி $\Leftrightarrow$ ஒவ்வொரு i-க்கும் $\lambda_i \geq 0$

(இ) T என்பது அலகு நிலைச் செயலி $\Leftrightarrow$ ஒவ்வொரு i-க்கும் $|\lambda_i| = 1$.

பகுதி - 5

பானக் அறமம்
(Banach Algebra)

இந்தப் பகுதியில், முறையான மற்றும் அருநிலை உறுப்புகள் பற்றியும் பூச்சியத்தின் திணையிய வகுப்பான், நிறமாலை மற்றும் அவற்றின் தன்மைகள் பற்றியும் விரிவாகக் காணலாம்.

23. வரையறை மற்றும் சில எடுத்துக்காட்டுகள்
Definition and Some Examples

முற்றொருமை உடைய மெய்புனையெண் பானக்வெளி (Complex Banach space) அறமமாக இருக்குமானால் அது **பானக் அறமம்** எனப்படும். இவற்றில் பெருக்கல் கட்டமைப்பு அலகையுடன் கீழ்கண்டவாறு தொடர்பு படுத்தப்பட்டுள்ளது.

(1) $\| xy \| \leq \| x \| \| y \|$

(2) $\|1\| \leq 1$

(1) லிருந்து திசையப் பெருக்கல் என்பது எந்த ஒரு பானக் அறமத்திலும், இணைந்து தொடர்ச்சியானவை என்பதை எளிதில் நிறுவலாம். அதாவது $x_n \to x, y_n \to y$, எனும் போது $x_n y_n \to xy$ ஆகும். இதனைக் கீழ்க்கண்டவாறு நிறுவலாம்.

$$\| x_n y_n - xy \| = \| x_n (y_n - y) + (x_n - x) y \|$$
$$\leq \| x_n (y_n - y) \| + \| (x_n - x) y \|$$
$$\leq \| x_n \| \| (y_n - y) \| + \| (x_n - x) \| \| y \|$$

$x_n \to x, y_n \to y$ எனும் போது சமனிலியின் வலதுபுறம் பூச்சியத்தை நெருங்கும். எனவே இடதுபுறமும் பூச்சியத்தை நெருங்கும். ஆதலால் $x_n y_n \to xy$.

A என்பது பானக் அறமம். அதன் உட்கணம் A' என்பதும் A–ல் உள்ள அதே செயலிகளைப் பொறுத்தும் அதே முற்றொருமைக்கும், அதே அலகைக்கு ஒரு பானக் அறமமாக அமையுமானால் A' என்பது A–ன் **பானக் உள் அறமம்** (Banach subalgebra) எனப்படும்.

சில நேரங்களில், பானக் அறமம் வரையறையில் அதன் அளவன் மெய்புனையெண் என்பதில் கட்டுப்பாடு ஏதுமில்லாமல் கொடுக்கப்படும். கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எடுத்துக்காட்டுகள் யாவும் பானக் அறமத்தின் முக்கியமான

விருப்பங்களை விவரிக்கின்றன. அவைகள் அனைத்தும் சார்புகள் (functions), செயலிகள் (operators) மற்றும் நேரியல் செயலிகள் ஆகியவற்றை உள்ளடக்கி இருக்கும். பொதுவாக, இது சார்பின அறமம் (functional algebra) செயலி அறமம் (function operators) அல்லது குழு அறமம் (Group algebra) என அதில் உள்ள பெருக்கல் வரையறைக்கு ஏற்றவாறு வகைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு - 1 X என்ற திணையிய வெளியில் (Topological space) வரையறை செய்யப்படும் அனைத்து எல்லைக்குட்பட்ட தொடர்ச்சியான மெய்புனையெண் சார்பு $\mathcal{C}(X)$ ஒரு பானக் அறமம் ஆகும். X என்பது ஒரே ஒரு புள்ளியை மட்டும் கொண்டிருக்குமானால் $\mathcal{C}(X)$ என்பது அனைத்து பானக் அறமங்களின் மிகவும் எளிமையான தாகும். $D = \{z : |z| \leq 1\}$ என்ற அலகு தகடு (unit disc) மெய்புனையெண் தளத்தில் எடுத்துக்கொள்வோம். D-ன் உள்பகுதியில் வரையறைசெய்யப்படும் வகைமுறை சார்புகள்(Analytic function) அடங்கிய $\mathcal{C}(D)$-ன் உட்கணம் உள்அறமம் ஆகும். இது முற்றொருமை உறுப்பை உள்ளடக்கி இருக்கும். மொரிரா(Morera) தேற்றத்தின் படி இது மூடியதாகும். எனவே $\mathcal{C}(D)$-ன் பானக் உள் அறமம் ஆகும். இதனை வட்டத்தகடு அறமம் (Disc Algebra) எனவும் அழைக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு - 2 B என்பது மெய்புனையெண் பானக் வெளி B-ன் மீது வரையறைசெய்யப்படும் அனைத்து செயலிகள் $\mathcal{B}(B)$ ஒரு பானக் அறமம் ஆகும்.

H என்பது ஹில்பர்ட் வெளி எனில், $\mathcal{B}(H)$ என்பது ஒரு பானக் அறமமாகும். $\mathcal{B}(H)$-ன் உள்அறமத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு செயலிக்கும் இணைச் செயலி (Adjoint Operator) இருக்குமானால் அந்த உள் அறமம் தன் இணை (Self adjoint) உள்அறமம் எனப்படும். இதனை C^*-அறமம் எனவும் குறிப்பிடலாம்.

24. ஒழுங்கான மற்றும் அருநிலை உறுப்புகள்
Regular and Singular elements

A என்பது பானக் அறமம் என்க. A-ல் உள்ள ஒழுங்கான உறுப்புகளின் கணத்தை G எனவும் அதன் நிரப்பிக் கணம், அதாவது அருநிலை உறுப்புகளின் கணத்தை S, எனவும் குறிப்பிடுவோம். G என்பது I-ஐயும் S என்பது 0-ஐ யும் உள்ளடக்கி இருக்கிறது என்பதை எளிதில் புரிந்து கொள்ளமுடிகின்றது. இந்தப் பகுதியில் உள்ள பெரும்பாலான முடிவுகள் G மற்றும் S-ன் தன்மைகளைச் சார்ந்தே இருக்கும். முதல் தேற்றமும் இந்த வகையில் அடங்கும்.

தேற்றம் 24.1 $\|x-1\|<1$ என்ற தன்மையுடைய ஒவ்வொரு x-ம் ஒழுங்கான உறுப்பு எனில் அதன் எதிர்மாறு உறுப்பை $x^{-1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)^n$ என எழுதலாம்.

நிறுவல்: $r=\|x-1\|$ என எடுத்துக்கொள்வாமானால், $r<1$ எனவும் $\|(1-x)^n\|\leq\|1-x\|^n$ $=r^n$ எனவும் கிடைக்கும். $\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)^n$ என்ற தொடரின் பகுதிக்கூட்டல் (Partial Sum) A-ல் ஒரு காசி (Cauchy) தொடர்வரிசையை உருவாக்குகிறது. இங்கு A என்பது முழுவெளி (Complete Space)யாதலால், அந்தப் பகுதி கூட்டல் A-ல் உள்ள ஒரு உறுப்பில் குவியும். இதனை $\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)^n$ எனக் குறிப்பிடலாம். நாம் இப்போது y-ஐ $y=1+\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)^n$ என வரையறைசெய்வோமானல் A-ல் பெருக்கல் இணைந்து தொடர்ச்சியானவையின் படி $y-xy=(1-x)y=(1-x)+\sum_{n=2}^{\infty}(1-x)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)^n=y-1$. அதாவது $y-xy=y-1$ எனவே $xy=1$ இதே போல $yx=1$ எனவும் நிறுவலாம். இவற்றிலிருந்து

$$x^{-1}=y=1+\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)^n$$

இந்தத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திக் கீழேஉள்ள தேற்றத்தை நிறுவலாம்.

தேற்றம் 24.2 G என்பது திறந்த கணம், எனவே S என்பது ஒரு மூடிய கணம்.

நிறுவல்: x_0 என்பது G-ல் ஓர் உறுப்பு என்க. x என்பது A-ல் $\|x-x_0\|<1/\|x_0^{-1}\|$ என்றவாறு உள்ள ஓர் உறுப்பு ஆகும். மேலும், $\|x_o^{-1}x-1\|=\|x_o^{-1}(x-x_o)\|\leq\|x_o^{-1}\|\,\|x-x_o\|<1$ என்பது எளிதில் விளங்குகின்றது. தேற்றம் 24.1-ன் படி $x_0^{-1}x$ என்பது G-ல் இருக்கும். ஆகவே $x=x_0(x_0^{-1}x)\in G$. இவற்றிலிருந்து G ஓர் திறந்தகணம் ஆகும். ஆகவே S என்பது ஓர் மூடிய கணம் ஆகும்.

தேற்றம் 24.3

G-லிருந்து G-க்கு வரையறை செய்யப்படும் சார்பு $x\to x^{-1}$ தொடர்ச்சியானது. ஆகவே இது G-லிருந்து G-க்கு (Homeomorphism) வடிவொப்புமைச் சார்பு ஆகும்.

நிறுவல் : x_0- என்பது G-ல் ஓர் உறுப்பு. x என்பது G-ல் $\|x-x_0\|<1/2\|x_0^{-1}\|$ என்றவாறு உள்ள மற்றொரு உறுப்பு ஆகும்.

இங்கு $\|x_0^{-1}x-1\| = \|x_0^{-1}(x-x_0)\| \le \|x_0^{-1}\|\,\|x-x_0\| < 1/2$ இவற்றிலிருந்து தேற்றம் 24.1-ன் படி $x_0^{-1}x$ என்பது G-ல் இருக்கும் என்பதைக் காணமுடிகிறது. ஆதலால்

$x^{-1}x_0 = (x_0^{-1}x)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(1-x_0^{-1}x)^n$ மேலும்,

$$\|x^{-1}-x_0^{-1}\| = \|(x^{-1}x_0-1)x_0^{-1}\| \le \|x_0^{-1}\|\,\|x_0^{-1}x-1\|$$

$$= \|x_0^{-1}\|\left\|\sum_{n=1}^{\infty}(1-x_0^{-1}x)^n\right\| \le \|x_0^{-1}\|\sum_{n=1}^{\infty}\|1-x_0^{-1}x\|^n$$

$$= \|x_0^{-1}\|\,\|1-x_0^{-1}x\|\sum_{n=0}^{\infty}\|1-x_0^{-1}x\|^n$$

$$= \|x_0^{-1}\|\,\|1-x_0^{-1}x\| / (1-\|1-x_0^{-1}x\|)$$

$$< 2\|x_0^{-1}\|\,\|1-x_0^{-1}x\| \le 2\|x_0^{-1}\|^2\,\|x-x_0\|$$

அதாவது, $\|x^{-1}-x_o^{-1}\| < 2\|x_o^{-1}\|^2\|x-x_o\|$ இவற்றிலிருந்து $x \to x^{-1}$ தொடர்ச்சியானது என்பது தெளிவாகிறது. இதே போல $x^{-1} \to x$ என்பதும் தொடர்ச்சியனாது என நிறுவலாம். ஆகவே $x \to x^{-1}$ வடிவொப்புமைச் சார்பு ஆகும்.

A-ல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பு x ஆனது தன்னைப் பொருத்தும் A-ஐப் பொறுத்தும் அதன் ஒழுங்கான தன்மை மற்றும் அருநிலைத் தன்மை அமையும் என்பதை மனதில் கொள்ளவேண்டும். அடுத்து வரும் பிரிவில், A-ல் அருநிலையாகவும், A-ன் நீட்டிப்பிலும் அருநிலையாகவும் உள்ள சில உறுப்புகளைப் பற்றிப் படிப்போம்.

25. சுழியின் அல்லது பூச்சிய திணைய வகுப்பான்கள் (Topological divisors of zero)

பானக் அறமம் A-ல் உள்ள z என்ற உறுப்புக்குத் தகுந்தாற்போல், A-ல் $\{z_n\}$ என்ற தொடர்வரிசை, $\|z_n\| = 1$ என்றவாறு $zz_n \to 0$ அல்லது $z_n z \to 0$ என்றிருக்குமானால், z என்பது **சுழியின் திணைய வகுப்பான்** எனப்படும். மேலும் சுழியின் ஒவ்வொரு வகுப்பானும் சுழியின் திணைய வகுப்பான் என்பது தெளிவாக உணர முடியும். சுழியின் அனைத்துத் திணைய வகுப்பான்களின் கணம் Z என குறிப்பிடப்படும்.

தேற்றம் 25.1 Z என்பது S -ன் உட்கணம்.

நிறுவல்: z என்பது Z-ன் உறுப்பு என்க. எனவே, z-க்குத் தகுந்தாற்போல் $\{z_n\}$என்ற தொடர்வரிசை, $\|z_n\| = 1$என்றவாறு $zz_n \to 0$என இருக்கும். z என்பது G-ல் இருக்கும்

என எடுத்துக் கொள்வோமானால், பெருக்கல் தொடச்சியானது என்றதனடிப்படையில், $z^{-1}(zz_n) = z_n \to 0$ எனக்கிடைக்கும். இது $\|z_n\|=1$ என்பதற்கு முரண்பாடாகும். எனவே. $z \in S$.

தேற்றம் 25.2 S–ன் வரம்பு Z–ன் உட்கணமாகும்.

நிறுவல்: S என்பது மூடிய கணமாதலால் அதன் வரம்பானது G–ல் உள்ள ஒவ்வொரு தொடர்வரிசையின் எல்லைப் புள்ளிகளைக் கொண்டிருக்கும். இது போன்ற ஓர் எல்லைப் புள்ளி z–ஐ S–ல் எடுத்துக் கொள்வோமானல், அதற்குத் தகுந்தாற்போல் $\{r_n\}$ என்ற தொடர்வரிசை $r_n \to z$ என்றவாறு $r_n \in G$ –லும் மற்றும் $z \in Z$–லும் இருக்கும் என நிறுவ வேண்டும்.

$r_n^{-1}z - 1 = r_n^{-1}(z - r_n)$, இவற்றிலிருந்து $\{r_n^{-1}\}$ என்பது எல்லைக்குட்படா தொடர்வரிசை என அறியலாம். அவ்வாறில்லையெனில். ஏதாவது ஒரு n–க்கு $\|r_n^{-1}z - 1\| < 1$ எனக் கிடைக்கும். எனவே $z = r_n(r_n^{-1}z)$ என்பது ஒழுங்கானவையாகும். $\{r_n^{-1}\}$ எல்லைக்குட்படா தொடர்வரிசையாதலால், $\|r_n^{-1}\| \to \infty$ என நாம் எடுத்துக் கொள்ளலாம். இப்போது $z_n = r_n^{-1} / \|r_n^{-1}\|$ என வரையறை செய்வோமானால்

$\|z_n\| = 1$ மற்றும்

$$zz_n = \frac{zr_n^{-1}}{\|r_n^{-1}\|} = \frac{1 + (z - r_n)r_n^{-1}}{\|r_n^{-1}\|} = \frac{1}{\|r_n^{-1}\|} + (z - r_n)z_n \to 0$$

ஆகியவற்றிலிருந்து z என்பது Z–ல் இருக்கும் என்பது நிறுவப்படுகிறது.

26. நிறமாலை (Spectrum)

T என்பது H என்ற ஹில்பர்ட் வெளியில் ஒரு செயலி. முந்தைய பகுதியில் T–ன் நிறமாலை என்பது $\sigma(T) = \{\lambda : T - \lambda I$ அருநிலை$\}$ என்ற கணம் என வரையறை செய்துள்ளோம். இந்தக் கணத்தில் உள்ள எண் λ என்பது T–யினால் ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்ட மதிப்பு ஆகும். அதாவது T ஒரு பூச்சியமில்லா திசையனில் செயல்படுத்தும் போது, அதன் நிழல், அந்தத் திசையனை λ ஆல் பெருக்கும் மதிப்பாக்கும் என்பதைக் காணலாம்.

இதேபோல, x என்ற திசையனை பானக் அறமம் A-ல் எடுத்துக் கொள்வோமானால் $\sigma(T) = \{\lambda : T - \lambda I$ அருநிலை$\}$ என்பது மெய்புனையெண் தளத்தில் உட்கணம் ஆகும். எப்போதெல்லாம் x–ன் நிறமாலை, x–ஐயும் A–ஐயும்

சார்ந்திருக்கின்றதோ அப்போதெல்லாம் $\sigma_A(x)$ என்ற குறியீட்டைப் பயன்படுத்துவோம். $x-\lambda I$ என்பது தொடர்சியானது எனவும் அதன் மதிப்பு A-ல் இருக்கும் எனவும் எளில் காணலாம். A-ல் உள்ள அனைத்து அருநிலை உறுப்புகளின் கணம் மூடிய உட்கணமாதலால், σ (x)-ம் மூடிய கணம் ஆகும். மேலும் σ (x) என்பது $\{z : |z| \leq \|x\|\}$-ன் உட்கணம் என்பதையும் உணரலாம். இங்கு λ என்பது $|\lambda| \geq \|x\|$ என்றவாறு மெய்புனையெண்ணாக இருக்கும் போது $\|x/\lambda\| < 1 \Rightarrow \|1-(1-x/\lambda)\| < 1$ எனவாகும். இங்கு $1 - x/\lambda$ ஒழுங்கானது. எனவே $x - \lambda I$-ம் ஒழுங்கானதாகும்.

நமது முக்கிய குறிக்கோள் σ (x) என்பது எப்போதுமே வெற்றற்ற கணம் என நிறுவுவதேயாகும். இதற்காகச் சில தொடக்கநிலைக் குறியீடுகள் தேவைப்படுகின்றன. σ (x) -ன் நிரப்பிக்கணம் x-ன் **கூறாக்கிக் கணம்** (Resolvent set of x) எனப்படும். இது $\rho(x)$ எனக் குறிப்பிடப்படும். இது மெய்புனையெண் தளத்தில், $\{z : |z| > \|x\|\}$என்ற கணத்தை உள்ளடக்கிய திறந்த கணம் ஆகும். x-ன் கூறாக்கி (Resolvent of x)என்பது $\rho(x)$-ன் மீது $x(\lambda) = (x - \lambda I)^{-1}$ என வரையறை செய்யப்படும் சார்பு ஆகும். தேற்றம் 24.3-ன் படி $x(\lambda)$என்பது தொடர்ச்சியானதாகும்.

மேலும் $x(\lambda) = \lambda^{-1}(x/\lambda - 1)^{-1}, \lambda \neq 0$ எனில் $\lambda \to \infty$ எனும்போது $x(\lambda) \to 0$ ஆகும். λ, μ என்பன $\rho(x)$ உறுப்புகள் எனில் $x(\lambda) = x(\lambda)[x - \mu I]x(\mu)$.

$$= x(\lambda)[x - \lambda I + (\lambda - \mu)I]x(\mu)$$

$$= [1 + (\lambda - \mu)x(\lambda)]x(\mu)$$

$$x(\lambda) = x(\mu) + (\lambda - \mu)x(\lambda)x(\mu)$$

$x(\lambda) - x(\mu) = (\lambda - \mu)x(\lambda)x(\mu)$. இந்த சமன்பாடு **கூறாக்கிச் சமன்பாடு** (Resolvent equation) எனப்படும்.

தேற்றம் 26.1

$\sigma(x)$ என்பது வெற்றற்ற கணம்.

நிறுவல்: f என்பது A*-ல் ஒரு உறுப்பு என்க. சார்பு f-ஐ $f(\lambda) = f(x(\lambda))$ என வரையறை செய்வோம். இது கூறாக்கிக் கணம் $\rho(x)$-ல் வரையறை செய்யப்பட்ட தொடர்ச்சியான மெய்புனையெண் சார்பு ஆகும். கூறாக்கிச் சமன்பாட்டிலிருந்து $\dfrac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} = f(x(\lambda)x(\mu))$ எனக்கிடைக்கும்.

இவற்றிலிருந்து $\lim_{\lambda \to \mu} \dfrac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} = f(x(\mu)^2)$ என எழுதுலாம். எனவே f (λ) என்பது $\rho(x)$-ன் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் வகைக்கெழு (derivative) உடையதாகும்.

மேலும் $|f(\lambda)| \le \|f\| \, \|x(\lambda)\|$ ஆகையால் $\lambda \to \infty$ எனும்போது $f(\lambda) \to 0$ எனக் கிடைக்கும்.

நாம் இப்போது $\sigma(x)$ வெற்றுக்கணம் என எடுத்துக்கொள்வோமானல், $\rho(x)$ என்பது முழு மெய்புனையெண் கணமாகும். மெய்புனையெண் பகுப்பாய்வில் (complex analysis) உள்ள லியோவில்லிஸ் (Liouville's) தேற்றத்தின் படி λ–ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் $f(\lambda) = 0$ ஆகும். தேற்றம் 10.2-ன் படி λ–ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் $x(\lambda)= 0$

இது எந்த ஒரு எதிர்மாறு சார்பும் பூச்சியமல்ல என்பதற்கு முரண்பாடாகும். எனவே நமது தற்கோள் தவறானதாகும். ஆதலால் $\sigma(x)$ என்பது வெற்றற்ற கணம் ஆகும்.

$\sigma(x)$ வெற்றற்ற கணம் என்பதும், இது மெய்புனையெண் தளத்தின் கச்சிதமான உள்வெளி (Compact subspace) என்பதும் நமக்குத் தெரியும். மேலும், $r(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$ என்று வரையறைசெய்யப்படும் எண், x–ன் **நிறமாலை ஆரம்** (Spectral radius) எனப்படும். இது $0 \le r(x) \le \|x\|$ என்றவாறு இருக்கும்.

தேற்றம் 26.2

A என்பது வகுத்தல் அறமம் (Division algebra) எனில், இது முற்றொருமையினுடைய அனைத்து அளவன் பெருக்கல்களின் கணத்திற்குச் சமமாகும்.

நிறுவல்: x என்பது A–ல் ஓர் உறுப்பு எனில், ஏதாவது ஒரு அளவன் λ–க்கு $x = \lambda 1$ ஆக இருக்கும் என நிறுவவேண்டும். அவ்வாறில்லையெனில், ஒவ்வொரு λ–க்கும் $x \neq \lambda 1$ என எடுத்துக்கொள்வோம். எனவே $x - \lambda 1 \neq 0$. அதாவது ஒவ்வொரு λ–க்கும் $x - \lambda 1$ ஒழுங்கானதாகும். எனவே $\sigma(x)$ என்பது வெற்றுக் கணம் ஆகும். இது தேற்றம் 26.1-க்கு முரணானதாகும். எனவே தேற்றம் நிறுவப்படுகிறது.

$\lambda 1 \to \lambda$ என்ற சார்பு முற்றொருமையின் அனைத்து அளவன் பெருக்கல்களின் கணத்திலிருந்து மெய்புனையெண்களின் பானக் அறமம் C–க்கு வரையறை செய்யப்படும் சமயாப்புள்ள சம ஒப்புமைச் சார்பு என்பது மிகவும் வெளிப்படையான ஒன்றாகும். எனவே தேற்றம் 26.2 -ன் படி, ஏதாவது ஒரு பானக் அறமம் வகுத்தல் அறமமாக இருக்குமானால் அது C–க்குச் சமமாகும்.

வகுத்தல் அறமங்களாக உடைய அனைத்து வகையான பானக் அறமங்களில் மிகவும் எளிமையானது C ஆகும். எனவே தேற்றம் 26.2-ன் படி இந்தத் தன்மைகளையுடை ஒரே ஒரு பானக் அறமம் C-மட்டுமேயாகும். அடுத்து வரும் இரு தேற்றங்களிலும் C–ன் முக்கியமான வேறுசில சிறப்பியல்புகளைப் பற்றிக் காணலாம்.

பூச்சியம் என்பது பூச்சியத்தின் வகுப்பான் ஆதலால், இது ஒவ்வொரு பானக் அறமத்திலும் பூச்சியத்தின் திணையிய வகுப்பான் ஆகும். பானக் அறமம் C–ல், பூச்சியம் மட்டுமே பூச்சியத்தின் திணையிய வகுப்பான் ஆகும். மறுதலையாகக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தேற்றத்தைக் காணலாம்.

தேற்றம் 26.3

A-ல் பூச்சியம் மட்டுமே பூச்சியத்தின் திணையிய வகுப்பானாக அமையுமானால், $A = C$ ஆகும்.

நிறுவல்: x என்பது A–ல் உள்ள ஓர் உறுப்பு என்க. இதனுடைய நிறமாலை $\sigma(x)$ என்பது ஒரு வெற்றற்ற கணம் ஆகும். ஆதலால் இது λ–ஐ எல்லைப்புள்ளியாகக் கொண்டிருக்கும். மற்றும் $x - \lambda I$ என்பது அனைத்து அருநிலை உறுப்புகளின் கணம் S–ன் எல்லைப்புள்ளி என்பது தெளிவாகிறது. தேற்றம் 25.2-ன் படி $x - \lambda I$ என்பது பூச்சியத்தின் திணையிய வகுப்பான் ஆகும். எனவே, இவற்றிலிருந்து நமது கருதுகோளின் படி $x - \lambda I = 0$ அல்லது $x = \lambda I$ எனவே $A = C$.

A-ல் பெருக்கல் மற்றும் அலகை ஆகியவற்றிற்கு இடையே உள்ள தொடர்பு $\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\|$ ஆகும். $A = C$ எனும்போது இந்த சமனிலி திரும்பிவிடுகிறது. பொதுவாக எந்த அளவிற்கு இந்தத் திருப்பம் உண்மையாகிறது என்பதை அடுத்து வரும் தேற்றத்தில் காணலாம்.

தேற்றம் 26.4

A-ல் உள்ள அலகை ஏதாவது ஒரு நேர்ம எண் k–க்கு $\|xy\| \geq k\|x\| \, \|y\|$ என்ற சமனிலியை நிறைவு செய்யுமானால் $A = C$ ஆகும்.

நிறுவல்: கொடுக்கப்பட்டுள்ள கருதுகோளின் படி, பூச்சியம் மட்டுமே பூச்சியத்தின் திணையிய வகுப்பான் என்பதை உணர முடிகிறது. இவற்றிலிருந்து தேற்றம் 26.3-ன் படி $A = C$ ஆகும்.

அடுத்த தேற்றத்தில் A–ஐ விரிவாக்கம் செய்யும் போது, A–ல் உள்ள x–ன் நிறமாலை என்னவாகும் என்பதைப் பற்றிக் காணலாம்.

தேற்றம் 26.5

A என்பது, பானக் அறமம் B-ன், உள் பானக் அறமம் எனில், A-ல் உள்ள x என்ற திசையனின் நிறமாலை A,B-களைப் பொறுத்துக் கீழ்க்கண்டவாறு தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளது.

(1) $\sigma_B(x) \subseteq \sigma_A(x)$

(2) $\sigma_A(x)$-ன் ஒவ்வொரு எல்லைப்புள்ளியும் $\sigma_B(x)$-ன் எல்லைப்புள்ளியாகும்.

நிறுவல்: $x - \lambda 1$ என்பது B-ல் அருநிலையெனில் உடனடியாக A-லும் அருநிலையாக இருக்கும். எனவே முடிவு (1) நிறுவப்படுகிறது. λ என்பது $\sigma_A(x)$-ன் எல்லைப்புள்ளி என எடுத்துக்கொள்வோம். எனவே $x - \lambda 1$ என்பது A-ல் உள்ள அருநிலை உறுப்புகளின் கணத்தின் எல்லைப்புள்ளியாகும். ஆதலால் தேற்றம் 18.2-ன் படி, இது A-ல் பூச்சியத்தின் திணையிய வகுப்பான் ஆகும். ஆகையால் B-லும் இது பூச்சியத்தின் திணையிய வகுப்பான் ஆகும். எனவே B-ல் அருநிலையாகும். இவற்றிலிருந்து $\lambda \in \sigma_B(x)$. முடிவு (1)-லிருந்து λ என்பது $\sigma_B(x)$-ன் எல்லைப்புள்ளி என்பது தெளிவாகிறது. எனவே (2)-ன் நிறுவல் முடிவடைகிறது.

இந்தத் தேற்றத்திலிருந்து, பொதுவாக ஒரு பானக் அறமம் விரிவுபடுத்தப்படும்போது அதில் உள்ள உறுப்பின் நிறமாலை சுருங்குகிறது என்பது தெளிவாகிறது.

27 நிறமாலை ஆரம் (Spectral radius)

x என்பது பானக் அறமம் A-ல் உள்ள ஓர் உறுப்பு, இதன் நிறமாலை ஆரம் என்பது $r(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_A(x)\}$ ஆகும்.

B என்பது x-ஆல் உருவாக்கப்பட்ட A-ன் உள்பானக் அறமம் எனில், தேற்றம் 26.5-ன் படி B-ஐப் பொறுத்து நிறமாலை ஆரம் கணக்கிட்டாலும் அதன் மதிப்பு மாறாது என்பது தெளிவாகிறது. அதாவது $r(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_B(x)\}$

தேற்றம் 27.1

$\sigma(x^n) = (\sigma(x))^n$ என நிறுவுக.

நிறுவல் : λ என்பது பூச்சியமில்லா மெய்புனையெண் என்க. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots . \lambda_n$ என்பன λ-யின் n வெவ்வேறான மூலங்கள் எனில், $x^n - \lambda I = (x - \lambda_1 I)(x - \lambda_2 I) \ldots (x - \lambda_n I)$ ஆகும். $x^n - \lambda I$ அருநிலையாக அமைய தேவையான மற்றும் போதுமான கட்டுப்பாடு ஏதாவது ஒரு i-க்காவது $x - \lambda_i I$ அருநிலையாக இருக்கும் என்பதாகும். இந்தக் கோட்பாட்டிலிருந்தும் மேலே உள்ள சமன்பாட்டிலிருந்தும் இந்தத் தேற்றம் நிறுவப்படுகிறது.

தேற்றம் 27.2 $r(x) = \lim \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ என நிறுவுக.

நிறுவல்: தேற்றம் 27.1-ன் படி $r(x^n) = r(x)^n$ ஆகும். மேலும் வரையறைப்படி $r(x^n) \leq \|x^n\|$ எனவே $(r(x))^n \leq \|x^n\|$ இவற்றிலிருந்து ஒவ்வொரு n-க்கும் $r(x) \leq \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ ஆகும். இந்த நிறுவல் முடிவடைதற்கு $r(x) < a$ என்றவாறு உள்ள ஏதாவது ஒரு மெய்யெண் a எனில், n-ன் முடிவுறு மதிப்புகளைத் தவிர அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் $\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq a$ பொருந்தும் என நிறுவினால் போதுமானதாகும்.

தேற்றம் 24.1-லிருந்து, $|\lambda| > \|x\|$ எனும் போது

$$x(\lambda) = (x - \lambda 1)^{-1} = \lambda^{-1}\left(\frac{x}{\lambda} - 1\right)^{-1}$$

$$= -\lambda^{-1}\left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1} \qquad (1)$$

$$= -\lambda^{-1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^n}\right]$$

எனக் கிடைக்கும். f என்பது A-ன் மீது ஏதாவது ஒரு சார்பின (functional) எனில்

$$f(x(\lambda)) = -\lambda^{-1}\left[f(1) + \sum f(x^n/\lambda^n)\right]$$

$$= -\lambda^{-1}\left[f(1) + \sum f(x^n)\lambda^{-n}\right] \qquad (2)$$

ஆகும்.

தேற்றம் 26.1-ல் $f(x(\lambda))$ என்பது $|\lambda| > r(x)$ என்ற பகுதியில் வகைமுறைச் சார்பு (analytic function) என்பதைப் பார்த்தோம். மேலும் (2), $f(x(\lambda))$-வின் லாரன்ட் தொடர் (Laurent series) ஆதலால், இந்த விரிவாக்கம், $|\lambda| > r(x)$-க்கு மட்டுமே பொருந்தும் என்பது மெய்புனையெண் பகுப்பாய்விலிருந்து நமக்குத் தெரியும். $r(x) < \alpha < a$ என்றவாறு உள்ள α என்பது எதாவது ஒரு மெய்யெண் என எடுத்துக்கொள்வோமானால், முந்தைய குறிப்புகளின்படி $\sum_{n=1}^{\infty} f(x^n/\alpha^n)$ ஒரு குவியும் தொடராகும். இதனுடைய உறுப்புகள் ஒரு எல்லைக்குட்பட்ட தொடர்வரிசையை A-ல் உருவாக்கும்.

எனவே $\|x^n/\alpha^n\| \leq k$ அல்லது, ஒவ்வொரு n-க்கும் ஏதாவது ஒரு நேர்ம முழு எண் k-க்கும் $\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq k^{\frac{1}{n}}\alpha$ என இருக்கும். n-ன் மதிப்பு தேவையான அளவிற்குப் பெரியதாக எடுத்துக்கொள்வோமானால், $\sqrt[n]{K}\alpha \leq a$ ஆக இருக்கும். சில குறிப்பிட்ட n-களைத் தவிர அனைத்து n-களுக்கும் $\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq a$ ஆக இருக்கும். இத்துடன் நிறுவல் முடிவடைகிறது.

28 அறமத்தின் படி மூலம் மற்றும் அரை எளிய அறமம்

Radical and Semi simplicity of Algebra

இறுதியாக, அறமம் A என்பது எளிய அறமம் என்றால் என்ன பொருள் என்பதையும் அதன் தன்மைகளையும் கண்டறிவதே நமது குறிக்கோளாகும். இதற்காக சீர்வளைய (Ideal) த்தின் படிமூலம் (Radical) மற்றும் சீர்வளையம் ஆகியவற்றைப் பற்றி முதலில் படிக்கலாம். முன்பே வரையறை செய்யப்பட்ட சீர்வளையத்தின் வரையறையை மீண்டும் நினைவுபடுத்துவோம். அறமம் A-ன் உட்கணம் I கீழ்க்கண்ட கட்டுப்பாடுகளை நிறைவு செய்யுமானால், அது சீர்வளையம் எனப்படும்.

1. I என்பது A-ன் நேரியல் உள்வெளி
2. A-ல் உள்ள ஒவ்வொரு x-க்கும் $i \in I \Rightarrow i\,x \in I$
3. Aல் உள்ள ஒவ்வொரு x-க்கும், $i \in I \Rightarrow xi \in I$

கட்டுப்பாடு (1), (2) -ஐ மட்டும் I நிறைவு செய்யுமானால் I-என்பது இடது சீர்வளையம் (left ideal) எனப்படும். கட்டுப்பாடு (1), (3) ஐ மட்டுமே I நிறைவு செய்யுமானால் I என்பது வலது சீர்வளையம் எனப்படும். மூன்று கட்டுப்பாடுகளையும் நிறைவு செய்யுமானால், I ஆனது இருபக்கச் சீர்வளையம் அல்லது சீர்வளையம் (Two sided Ideal) எனப்படும்.

A-ல் உள்ள சீர்வளையங்களின் தன்மைகள் A-ல் உள்ள ஒழுங்கான மற்றும் அருநிலை உறுப்புகளின் தன்மைகளுடன் நெருங்கிய தொடர்புடையதாகும். இதுவரை A-ல் உள்ள x என்ற உறுப்பு ஒழுங்கானது என்பதை, அதற்குத் தகுந்தாற்போல் y என்ற உறுப்பு $xy = yx = 1$ ஆக இருக்கும் என வரையறை செய்தோம். இனி வரும் பகுதிகளில் சற்று மாறுதலாக, x-க்குத் தகுந்தாற்போல் y என்ற உறுப்பு $yx = 1$ என இருக்குமாயின் x-ஐ இடது ஒழுங்கானது (left reqular) எனக் கூறலாம். x-ஆனது இடது ஒழுங்கற்றது எனில் இடது அருநிலையுடையது எனப்படும். இதே போல, வலது ஒழுங்கானது, வலது அருநிலையுடையது ஆகியவற்றையும் வரையறை செய்யலாம். x என்பது இடது ஒழுங்கானது மற்றும் வலது ஒழுங்கானது எனில், அதற்குத் தகுந்தாற்போல் $yx = 1$, $xz = 1$ என்றவாறு y, z இருக்குமானால், $y = y(1) = y(xz) = (yx)z = (1)z = z$ ஆகும்.

இந்தத் தொடர்பு, சாதாரணமாக x- ஒழுங்கானது எனில் $x^{-1} = y = z$ என்பதைக் காட்டுகிறது.

A–ல் உள்ள ஒரு முறையான இடது சீர்வளைம் வேறு எந்த முறையான இடது சீர் வளையத்திலும் உள்ளடங்கியிருக்கவில்லையெனில் அது பெரும இடது சீர்வளையம் (Maximal left Ideal) எனப்படும். ஏதாவது ஒரு முறையான இடது சீர்வளையத்தை பெரும் இடது சீர்வளையத்தில் பதிக்கலாம் என்பதை ஜோன் துணைத்தேற்றம் (Zorn's lemma) காட்டுகிறது. இவற்றிலிருந்து பெரும இடது சீர்வளையம், முறையான இடது சீர்வளையம் $\{0\}$- ஐ உள்ளடக்கியிருக்கின்றது என்பது தெளிவாகிறது. A–ன் அனைத்துப் பெரும இடது சீர்வளையங்களின் வெட்டுக்கணம் A–ன் படிமூலம் (Radical) R எனப்படும். இதனை $R = \cap$ MLI என குறிப்பிடுவது மிகவும் வசதியாகயிருக்கும். இதே நடைமுறையில் வலது சீர் வளையத்திற்கும் படிமூலம் வரையறை செய்யலாம்.

துணைத்தேற்றம் 28.1

r என்பது R–ல் ஓர் உறுப்பு எனில், 1- r என்பது இடது ஒழுங்கானதாகும்.

நிறுவல்: 1- r என்பது இடது அருநிலை என எடுத்துக்கொள்வோம். எனவே $L = A(1- r) = \{x - xr : x\in A\}$ என்பது 1- r-ஐ உள்ளடக்கிய முறையான இடது சீர்வளையம் ஆகும். அடுத்ததாக L–ஐ M–என்ற பெரும இடது சீர்வளையத்தில் பதியவைப்போம். இதுவும் கூட 1- r–ஐ உள்ளடக்கியிருக்கும் r என்பது R-ல் இருப்பதாலும் அது M-யிலும் இருக்கும். எனவே $(1- r) + r\in M$ அதாவது $1\in M$ எனவே. $M = A$ இது ஒரு முரண்பாடாகும். எனவே நமது தற்கோள் தவறு. ஆதலால் 1- r இடது ஒழுங்கானதாகும்.

துணைத்தேற்றம் 28.2

r என்பது R–ல் ஓர் உறுப்பு எனில் 1- r என்பது ஒழுங்கானதாகும்.

நிறுவல்: இங்கு r-என்பது R–ல் ஓர் உறுப்பு. எனவே தேற்றம் 28.1-ன் படி இதற்குத் தகுந்தாற் போல $s(1- r) = 1$ என்றவாறு ஒரு s இருக்கும். எனவே s என்பது வலது முறையானது. மற்றும் $s = 1- (-s)\, r$ ஆகும். R என்பது இடது சீர்வளையமாதலால், (-s)r என்பது R–ல் இருக்கும். மீண்டும் ஒரு முறை துணைத் தேற்றம் 28.1 ஐப் பயன்படுத்தினால் $1- (-s)r = s$ என்பது இடது ஒழுங்கானது எனக் கிடைக்கும். எனவே s என்பது இடது ஒழுங்கானது, மற்றும் வலது ஒழுங்கானதாகும். இதன் எதிர்மாறு (1-r)– உடன் s ஒழுங்கானதாகும். எனவே 1-r-ம் ஒழுங்கானதாகும்.

துணைத்தேற்றம் 28.3

r என்பது R–ல் ஓர் உறுப்பு எனில், ஒவ்வொரு x–க்கும் (1-xr)-ம் ஒழுங்கானதாகும்.

நிறுவல்: R-என்பது இடது சீர்வளையம் எனவே ஒவ்வொரு x-க்கும் $xr \in R$ தேற்றம் 28.2-ன்படி 1- xr என்பது ஒழுங்கானதாகும்.

துணைத்தேற்றம் 28.4

ஒவ்வொரு x-க்கும் 1- xr என்பது ஒழுங்கானது என்ற தன்மையுடைய r என்ற உறுப்பு A-ல் இருக்குமெனில், r என்பது R-லும் இருக்கும்.

நிறுவல்: r என்பது R-ல் இல்லை என எடுத்துக்கொள்வோம். ஆதலால் r- என்பது ஏதாவது ஒரு பெரும இடது சீர்வளையம் M-ல் இருக்காது.

$M + Ar = \{m + xr : m \in M$ மற்றும் $x \in A\}$ என்பது M, r ஆகியவற்றை உள்ளடக்கிய இடது சீர்வளையம் என எளிதில் நிறுவலாம். எனவே M+Ar = A மற்றும் ஏதாவது ஒரு m மற்றும் x-க்கு m + xr = 1 ஆக இருக்கும். இவற்றிலிருந்து, 1- xr = m என்பது M-ல் ஒழுங்கான உறுப்பு ஆகும். இது இயலாத ஒன்றாகும். ஏனெனில் எந்த ஒரு முறையான சீர்வளையமும் ஒழுங்கான உறுப்பைப் பெற்றிருக்காது. எனவே நமது தற்கோள் தவறானதாகும். ஆதலால் r என்பது R-ல் இருக்கும் என்பது நிறுவப்படுகின்றது.

மேலே நிறுவப்பட்டுள்ள நான்கு துணைத் தேற்றங்களின் படி

$\cap$ MLI={r:1- rx, என்பது ஒவ்வொரு x-க்கும் ஒழுங்கானது} - (1)

இதே முறையைப் பின்பற்றி

$\cap$ MRI = {r :1- rx, என்பது ஒவ்வொரு x-க்கும் ஒழுங்கானது} - (2)

சமன்பாடு (1) மற்றும் (2) ஆகியவற்றில் வரையறை செய்யப்பட்டுள்ள நான்கு கணங்களும் சமம் என (1), (2) ஆகியவற்றின் வலதுபுறம் உள்ள கணங்கள் சமம் எனக் காண்பதன் மூலம் நிறுவலாம். இதனைப் பின்வரும் துணைத்தேற்றத்தில் நிறுவலாம்.

துணைத்தேற்றம் 28.5

(1- xr) ஒழுங்கானது எனில் (1- rx)-ம் ஒழுங்கானதாகும்.

நிறுவல்: (1 - xr) ஒழுங்கானது என எடுத்துக்கொள்வோம். இதன் எதிர்மாறு $s = (1-xr)^{-1}$ என்க. இதன் பொருள் என்னவெனில், (1- xr) s = s (1- xr) = 1 மேலும் (1- rx) (1+ rsx) = (1+ rsx) (1- rx) =1 என எளிதில் நிறுவலாம்.

அதாவது $s = (1-xr)^{-1} = 1 + xr + (xr)^2 + (xr)^3 . . . .$

மற்றும் $(1- rx)^{-1} = 1 + rx + rxrx + rxrxrx + ...$

$= 1 + r (1 + x r + xrxr + . . .)x$

$= 1 + rsx$

எனவே (1 - rx)(1 + rsx) =1. இவற்றிலிருந்து 1+ rsx- ஐ எதிர்மாறாக உடைய (1- rx) என்பது ஒழுங்கானதாகும்.■

மேலே உள்ள துணைத்தேற்றங்களைத் கொண்டு கீழே உள்ள தேற்றத்தை நிறுவலாம்.

தேற்றம் 28.6

(1) மற்றும் (2) ஆகியவற்றில் உள்ள நான்கு கணங்கள் ஒவ்வொன்றுக்கும் A-ன் படி மூலம் (Radical of A) R–க்கு சமமாகும். மேலும் A-ன் படி மூலம் முறையான இருபக்கச் சீர்வளையமாகும்.

அறமம் A- ன் படிமூலம் (Radical) பூச்சியச் சீர்வளையம் {0} க்குச் சமமாக இருக்குமானால், அறமம் A ஆனது அரை எளிய அறமம் (Semi simple Algebra) எனப்படும். அதாவது A-ன் ஒவ்வொரு பூச்சியமில்லா உறுப்பும் ஏதாவது ஒரு பெரும இடது சீர்வளையத்தின் வெளிப் பகுதியில் இருக்கும்.

மேலே விவரிக்கப்பட்டவை யாவும் அறமத்தன்மை வாய்ந்ததாகும். அவற்றை நமது பானக் அறமம் மட்டுமல்லாது அறமம் மற்றும் முற்றொருமையுடன் கூடிய வளையம் (ring) ஆகியவற்றிற்கும் பயன்படுத்தலாம். I என்பது A-ல் ஏதாவது ஒரு சீர்வளையம் (இடது, வலது அல்லது இருபக்கம்) எனில், அறமச் செயல்களின் சேர்ந்து தொடர்ச்சியான (Joint continutity) வையாதலால் I ன் அடைப்பு (closure) $\bar{I}$ என்பதும் அதே வகையைச் சார்ந்த சீர்வளையமாகும். அடுத்ததாக, ஏதாவது ஒரு முறையான சீர்வளையம் முறையான மூடியக் கணம் S-ன் உள்ளிருக்கும் மற்றும் ஏதாவது ஒரு முறையான சீர்வளைத்தின் அடைப்பு, என்பதும் அதே வகையைச் சார்ந்த முறையான சீர்வளையமாகும்.

தேற்றம் 28.7

A-ல் உள்ள ஒவ்வொரு பெரும இடது சீர்வளையம் மூடியதாகும்.

நிறுவல்: எந்த ஒரு பெரும இடது சீர்வளையம் L மூடியது அல்ல எனில், L என்பது முறையான இடது சீர்வளையம் $\bar{L}$ -ன் முறையான உட்கணமாகும். ஆனால் இது இயலாத ஒன்றாகும். ஏனெனில் இது L என்பது பெருமச் சீர்வளையம் என்பதற்கு முரண்பாடாகும்.

மேலே உள்ள இரண்டு தேற்றங்களையும் ஒன்றிணைத்துக் கீழ்க்கண்ட தேற்றத்தை எழுதலாம்.

தேற்றம் 28.8

A-ன் படி மூலமும் R என்பது முறையான மூடிய இருபக்கச் சீர்வளையமாகும்.

தேற்றம் 28.9

A-ல் I என்பது முறையான மூடிய இருபக்கச் சீர்வளையம் எனில், வகுத்தல் அறமம் A/I என்பதும் ஒரு பானக் அறமம் ஆகும்

நிறுவல்: தேற்றம் 8.1-ன் படி A/I என்பது $\|x+I\| = \inf\{\|x+i\| : i \in I\}$ என்ற அலகைப் பொறுத்து ஒரு மெய்புனையெண் பானக் வெளி ஆகும்.

மேலும் A/I என்பது முற்றொருமை 1+I-உடைய ஓர் அறமம் என எளிதில் நிறுவலாம்.

மேலும் $\|(x+I)(y+I)\| = \|xy+I\| = \inf\{\|xy+i\| : i \in I\}$

$$\leq \inf\{\|(x+i_1)(y+i_2)\| : i_1, i_2 \in I\}$$

$$\leq \inf\{\|x+i_1\|\,\|y+i_2\| : i_1, i_2 \in I\}$$

$$= \inf\{\|x+i_1\| : i_1 \in I\} \inf\{\|x+i_2\| : i_2 \in I\}$$

$$= \|x+I\|\,\|y+I\|.$$

அதாவது $\|(x+I)(y+I)\| \leq \|x+I\|\,\|y+I\|$

இங்கு $\|1+I\| = \inf\{\|1+i\| : i \in I\} \leq \|1\| = 1$. அதாவது $\|1+I\| \leq 1$

இறுதியாக நாம் $\|1+I\| \geq 1$ என நிறுவவேண்டும்.

இதற்காக $\|1+I\| = \|(1+I)^2\| \leq \|1+I\|^2$

$$\Rightarrow 1 \leq \|1+I\|.$$

எனவே $\|1+I\| = 1$. அதனால் A/I என்பது ஒரு பானக் அறமம் ஆகும்.

தேற்றம் 28.10 A/R என்பது எளிய பானக் அறமம் ஆகும்.

நிறுவல்: A-லிருந்து A/R -க்கு வரையறை செய்யபடும் $x \to x + R$ என்ற இயல்பான செயலொப்புமைச் (Natural homomorphison) சார்பு பெரும இடது சீர்வளையம் A-க்கும் A/R -க்கும் இடையே ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடைய சார்பை உருவாக்குகின்றது என்பதை எளிதில் உணர முடிகின்றது. எனவே A/R என்பது அரை எளிய பானக் அறமம் ஆகும்.

ஜஜஜஜஜஜ

பகுதி - 6

பரிமாற்றுப் பானக் அறமம்
(Commutative Banch Algebra)

பானக் அறமங்களில் மிகவும் இனிமையான எளிமையானது X என்ற திணைய வெளியில் வரையறை செய்யப்படும் அனைத்து தொடர்ச்சியான எல்லைக்குட்பட்ட மெய்புனையெண் சார்புகள் $\mathcal{C}(X)$ ஆகும். இந்தப் பகுதியில், நமது முக்கிய நோக்கமானது, ஜெல்பாண்டு நியுமார்க் தேற்றம் (Gelfand-Neumark Theorem) என்ற மிகவும் பிரபலமான தேற்றத்தை நிறுவுவதேயாகும். இந்த தேற்றமானது, பொறுத்தமான ஹாஸ்ட்ராப் (Hausdorff) வெளி X- ஐ தேர்ந்தெடுக்கும் போது $\mathcal{C}(X)$ என்பது ஒவ்வொரு பரிமாற்று பானக் அறமத்திற்கு ஒத்துபோகும் என்பதாகும்.

29. ஜெல்பாண்டு சார்பிடல் (Gelfand mapping)

A என்பது ஏதாவது ஒரு பரிமாற்று பானக் அறமம் என்க. இந்த பகுதியின் முதல் தேற்றம் A-ன் கட்டமைப்பு கோட்பாடுகளைப் பற்றி படிப்பதாகும். பின்னர் வரும் தேற்றங்கள் யாவும் ஜெல்பேண்டு நியுமார்க் தேற்றத்தை நோக்கியேச் செல்லும்.

தேற்றம் 29.1

M என்பது பரிமாற்று பானக் அறமம் A-ன் பெரும சீர்வளையம் எனில் A/M என்ற பானக் அறமம் வகுத்தல் அறமம் ஆகும். எனவே மெய்புனையெண்கள் கொண்ட பானக் அறமம் C-க்கு சமமாக இருக்கும். A-லிருந்து $A/M = C$ -க்கு வரையறை செய்யப்படும். சார்பு $x \to x(M)$ என்பது கீழ்கண்ட தன்மைகளைக் கொண்டிருக்கும்.

(1) $(x+y)(M) = x(M) + y(M)$

(2) $(\alpha x)(M) = \alpha x(M)$

(3) $(xy)(M) = x(M)y(M)$

(4) $x(M) = 0 \Leftrightarrow x \in M$

(5) $1(M) = 1$

(6) $|x(M)| \le \|x\|$. இங்கு $x(M)=x+M$ என்ற மெய்புனையெண் ஆகும்

நிறுவல்: தேற்றம் 28.7 மற்றும் தேற்றம் 28.9-ன் படி A/M என்பது ஒரு பானக் அறமம் ஆகும். A-ஒரு முற்றொருமை உறுப்பை கொண்டிருப்பதால், M என்பது பெரும சீர்வளையமாகும். எனவே தேற்றம் 4.2-ன் படி A/M ஒரு வகுத்தல் அறமமாகும். தேற்றம் 26.2-ன் படி A/M என்பது C-க்கு சமமாகும். இறுதியாக (1) முதல் (5) வரை உள்ள தன்மைகளை செயலொப்புமை சார்புகளின் (homomorphic function) விளைவுகளினால் எளிதில் நிறுவலாம். மேலும்

$$|x(M)| = |x+M| = \|x+M\| = \inf\{\|x+M\| : m \in M\} \le \|x\|$$

இவற்றிலிருந்து தன்மை (6) நிறுவப்படுகிறது.

இந்த தேற்றத்தின் நிறுவலானது இதற்கு முந்தைய பகுதிகளில் உள்ள ஒவ்வொரு முக்கியமான தேற்றத்தை நேரடியாகவோ அல்லது மறைமுகமாவோ சார்ந்திருக்கின்றது என்பதை உணரும் போது மிகவும் ஆச்சிரியப்பட வைக்கின்றது.

தேற்றம் 29.1-ஆனது x(M) என்பது ஒவ்வொரு நிலையான M-க்கும் x-ஐ சார்ந்த ஒரு சார்பு என அழுத்தமாக குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது. இருந்தாலும் இந்த குறியீடு நமக்கு, ஒவ்வொரு நிலையான x-க்கும் x(M) என்ற மெய்புனையெண் சார்பு, A-ல் உள்ள பெரும சீர்வளையங்களின் கணம் $\mathcal{M}$-ன் மீது வரையறை செய்வதற்கு பயன்படுத்தி கொள்வதற்கான கருத்தை கொடுத்திருக்கிறது. நாம் மேலும் செல்வதற்கு இதுவே வழியாகும்.

x-என்பது A-ல் உள்ள ஓர் உறுப்பு. $\hat{x}$ என்பது $\mathcal{M}$-ன் மீது வரையறை செய்யப்படும் $\hat{x}(M) = x(M)$ என்ற சார்பைக் குறிக்கும். மேலும் $\hat{A} = \{\hat{x} : x \in A\}$ என்க. அடுத்ததாக நாம் $\hat{A}$ -ல் உள்ள ஒவ்வொரு சார்பும் தொடர்ச்சியானதாக உள்ளவாறு $\mathcal{M}$-ன் மீது ஒரு பொருத்தமான திணையியலை வரையறை செய்வோம்.

$\mathcal{M}$-ன் மீது $\hat{A}$ -னால் உருவாக்கப்படுகிற நலிந்த திணையியல் (Weak Topology) ஒவ்வொரு தொடர்ச்சியான சார்பு $\hat{x}$ மற்றும் $S(\hat{x}, M_0, \in) = \{M : M \in \mathcal{M}$ மற்றும் $|\hat{x}(M) - \hat{x}(M_0)| < \in\}$ என்ற துணை அடிக்கண (Sub basis) திறந்த கணத்திற்கு தொடர்புடையதாகும். இந்த திணையிய வெளி $\mathcal{M}$-என்பது பெரும சீர்வளைய வெளி (Maximal ideal space) எனப்படும். A-லிருந்து $\hat{A}$ –க்கு வரையறை செய்யப்படும் சார்பு $x \to \hat{x}$ என்பது ஜெல்பாண்ட் சார்பிடல் எனப்படும்.

நாம் இப்போது, ஜெல்பாண்ட் சார்பிடலை மையக் கருவாகக் கொண்டு தேற்றம் 29.1-ன், மாற்றியமைக்கப்பட்டத் தேற்றத்ததை காணலாம்.

தேற்றம் 29.2

$x \to \hat{x}$ என்ற ஜெல்பாண்ட் சார்பிடல், A-யிலிருந்து $\mathcal{C}(\mathcal{M})$-க்கு கீழ்க்கண்ட தன்மைகளுக்கு ஒரு அலகை இறங்கு வரிசை செயலொப்புமைச் (Norm decresing homomorphism) சார்பு ஆகும்.

(1) A-ன் நிழல் $\hat{A}$ என்பது $\mathcal{C}(\mathcal{M})$-ன் உள்அறமம். இது $\mathcal{M}$-ன் புள்ளிகளைப் பிரிக்கும், $\mathcal{C}(\mathcal{M})$-ன் முற்றொருமைகளை உள்ளடக்கி இருக்கும் .

(2) A-ன் சீர்வளையப் படிமூலம் R-என்பது $\hat{x} = 0$ என்றவாறு உள்ள அனைத்து x-களின் கணத்திற்கு சமமாகும். எனவே $x \to \hat{x}$ என்பது சம ஒப்புமைச் சார்பு $\Leftrightarrow$ A என்பது எளிய அரை அறமம்.

(3) A- ல் உள்ள ஓர் உறுப்பு x ஒழுங்கானது $\Leftrightarrow$ இது எந்த பெரும சீர்வளையத்தில் இருக்காது $\Leftrightarrow$ ஒவ்வொரு M-க்கும் $\hat{x}(M) \neq 0$.

(4) x-என்பது A-ல் ஓர் உறுப்பு எனில், இதன் நிறமாலை $\hat{x}$-ன் வீச்சிக்கு சமமாகவும் நிறமாலை ஆரம் $\hat{x}$- ன் அலகைக்கு சமமாகவும் இருக்கும். அதாவது, $\sigma(x) = \hat{x}(\mathcal{M})$ மற்றும் $r(x) = \sup|\hat{x}(M)| = \|\hat{x}\|$.

நிறுவல்: $\mathcal{M}$-ன் மீது வரையறை செய்யப்படும் திணையியல், $\hat{x}$ தொடர்ச்சியானது என உறுதியளிக்கிறது. மேலும் தேற்றம் 29.1-ன் (6)-வது தன்மை, $\hat{x}$ எல்லைக்குட்பட்டது என்பதைக் காட்டுகிறது. அதாவது, $\|\hat{x}\| = \sup|\hat{x}(M)| \leq \|\hat{x}\|$. ஆகவே $x \to \hat{x}$ என்பது A-லிருந்து $\mathcal{C}(\mathcal{M})$-க்கு அலகை இறங்குவரிசை சார்பிடல் ஆகும். இந்த சார்பு செயலொப்புமைச் சார்பு என்பது தேற்றம் 29.1-ல் உள்ள (1),(2), (3) ஆகியவற்றிலிருந்து உடனடியாகத் தெரியவருகிறது.

$x \to \hat{x}$ என்பது செயலொப்புமைச் சார்பு ஆதலால், $\hat{A}$ என்பது $\mathcal{C}(\mathcal{M})$-ன் உள் அறமம் என்பது தெளிவாகிறது. இப்போது கூறப்பட்ட $\hat{A}$-ன் தன்மைகள் தேற்றம் 29.1-ல் உள்ள தன்மைகள் (4) மற்றும் (5)-லிருந்து உடனடியாகக் கிடைக்கிறது. $M_1 \neq M_2$ மற்றும் x என்ற திசையன் M_1-ல் உள்ளது எனவும் M_2-ல் இருக்காது எனவும் எடுத்துக்கொள்வோமானால் $\hat{x}(M_1) = 0$ மற்றும் $\hat{x}(M_2) \neq 0$; எனவே ஒவ்வொரு M-க்கும் $\hat{1}(M) = 1$

R என்பது அனைத்து M-களின் பெருமச் சீர்வளையங்களின் வெட்டுக்கணம் என்பதை நினைவுபடுத்திப் பார்ப்போமானால் (2)-வதுத் தன்மையை எளிதில் நிறுவலாம். தேற்றம் 29.1-ல் உள்ள தன்மை (4) -லிருந்து ஒவ்வொரு M-க்கும் $\hat{x}(M) = 0 \Leftrightarrow x$ என்பது ஒவ்வொரு M-லும் இருக்கும் என்பதை கவனித்தால் நிறுவல் (2) எளிதில் முடிவுறும்.

தன்மை (3)-ஐ நிறுவுவதற்குப் பதிலாக தேற்றம் 29.1-ல் தன்மை (4)-ன் படி x என்பது முறையானது $\Leftrightarrow$ x வேறு எந்த M-லும் இருக்காது என நிறுவினால் போதுமானதாகும். முறையான உறுப்பு எந்த முறையான சீர்வளையத்திலும் இருக்காது என்பது மிகவும் அடிப்படையானதாகும். எனவே நமது நோக்கம் x என்பது அருநிலை எனில், இது ஏதாவது ஒரு M-ல் இருக்கும் என நிறுவினால் போதுமானதாகும். இங்கு x அருநிலை உறுப்பாதலால் $A x = \{yx : y \in A\}$ என்பது x-ஐ உள்ளடக்கிய முறையான சீர்வளையம் மற்றும் இந்த சீர் வளையத்தை, x-ஐ உள்ளடக்கிய M-என்ற பெரும சீர்வளையத்தில், பதிய வைக்கலாம் என்பதிலிருந்து இந்தப் பகுதி நிறுவப்படுகிறது.

இறுதியாகத் தன்மை (3)-ஐ பயன்படுத்தி (4)-ஐ நிறுவலாம். x-ன் நிறமாலை வரையறையின்படி $\lambda \in \sigma(x) \Leftrightarrow x-\lambda I$ என்பது அருநிலை

$\Leftrightarrow (x - \lambda I) M = 0$, ஏதாவது M-க்கு

$\Leftrightarrow (\hat{x} - \lambda I) M = 0$, குறைந்தது ஒரு M-க்கு

$\Leftrightarrow \hat{x}(M) = \lambda$ குறைந்தது ஒரு M-க்கு

எனவே $\sigma(x)$ என்பது $\hat{x}$-ன் வீச்சு ஆகும். இந்த நிறுவலின் எஞ்சியப் பகுதி நிறமாலை ஆரம் வரையறையிலிருந்து எளிதில் நிறுவலாம்.

இந்தப் பகுதியின் முக்கியமான தேற்றமான $\mathcal{M}$- ஒரு கச்சிதமான ஹாஸ்ட்ராப் வெளி என நிறவுவதற்குத் தேவையான சில தேற்றங்களை நாம் காணலாம்.

A^*- என்பது A-ன் இணையிய வெளி என்பது நமக்குத் தெரியும்.மேலும்

$$S^* = \{f : f \in A^* \text{ மற்றும் } \|f\| \leq 1\}$$

என்ற மூடிய அலகு கோளம் ஒரு கச்சிதமான ஹாஸ்ட்ராப் வெளி ஆகும். A^*-ல் உள்ள பூச்சியமற்ற சார்பின f ஆனது $f(xy) = f(x)f(y)$ என்ற கட்டுப்பாட்டை நிறைவு செய்யுமானால், f என்பது A-ன் மீது பெருக்குச் சார்பின (Multiplicative functional) எனப்படும். தேற்றம் 29.1-லிருந்து $\mathcal{M}$-ல் உள்ள ஒவ்வொரு M-க்கு அதற்குத் தகுந்தாற்போல் f_M என்ற சார்பு $f_M(x) = x(M)$ என வரையறை செய்யலாம். மேலும் $M \to f_M$ என்ற சார்பு $\mathcal{M}$-லிருந்து பெருக்குச் சார்பினங்களின் கணத்திற்கு வரையப்படும் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடைய சார்பு என்பது மிகவும் முக்கியமானதாகும்.

துணைத் தேற்றம் 29.3

f_1, f_2 என்பன A-ன் மீது ஒரே வெற்று வெளி (Null space) உடைய பெருக்குச் சார்பின எனில் $f_1 = f_2$ ஆகும்.

நிறுவல்: ஏதாவது ஒரு அளவன் α–க்கு $f_1 = \alpha f_2$ என முதலில் என நிறுவவேண்டும். x_0 என்பது M-ல் இல்லாத A-ல் ஒரு உறுப்பு என்க. x என்பது A-ல் ஏதாவது ஒரு உறுப்பு

எனில், இதை $x = m + \beta\, x_0$, $m \in M$ என ஒரே ஒரு வகையில் விவரிக்கலாம். இங்கு $\beta = f_2(x)/f_2(x_0)$ என்க. எனவே, $f_2(m) = 0$. இப்போது

$$f_1(x) = f_1(m) + \beta f_1(x_0) = \beta f_1(x_0)$$
$$= [f_1(x_0)/f_2(x_0)]\, f_2(x)$$

எனவே $f_1 = \alpha f_2$ இங்கு $\alpha = f_1(x_0)/f_2(x_0)$.

இங்கு $\alpha = 1$ என நிறுவினால் தேற்றம் முடிவுறும். x என்பது M-ல் இல்லாத ஒரு உறுப்பு எனில் $f_2(x) \neq 0$. மேலும்

$$\alpha\, (f_2(x))^2 = \alpha\, (f_2(x^2) = f_1(x^2) = (f_1(x))^2 = [\alpha\, f_2(x)]^2 = \alpha^2 (f_2(x))^2$$

இவற்றிலிருந்து, $\alpha = \alpha^2$ இந்தச் சமனி $\alpha = 0$ அல்லது $\alpha = 1$எனும் போது மட்டும் உண்மையாகிறது. இங்கு $f_1 \neq 0$. எனவே $\alpha = 1$.

தேற்றம் 29.4

A-ன் அனைத்து பெரும சீர் வளையங்களின் கணம் $\mathcal{M}$-லிருந்து பெருக்குச் சார்புகளின் கணத்திற்கு வரையறை செய்யப்படும் $M \rightarrow f_M$ என்ற சார்பு ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடைய மேல் சார்பு ஆகும்.

நிறுவல்: $M \rightarrow f_M$ என்ற சார்பு ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடையது என எளிதில் நிறுவலாம். அதாவது $M_1 \neq M_2$ எனில், x என்பது M_1-ல் இருக்கும், M_2-ல் இருக்காது என எடுத்துக்கொள்வோமானால், $f_{M_1}(x) = 0$, $f_{M_2}(x) \neq 0$. மேலும் இச் சார்பு மேல் சார்பு (On to map) என நிறுவவேண்டும். இதற்காக f என்பது ஏதாவது ஒரு பெருக்குச் சார்பு மற்றும் இதன் வெற்று வெளி $M = \{x : f(x) = 0\}$ எனவும் எடுத்துக்கொள்வோம். இங்கு M-என்பது A-ன் முறையான மூடிய சீர்வளையமாகும். மேலும் M என்பது I என்ற முறையான சீர் வளையத்தில் உள்ளடங்கியிருக்குமானால் f (I)-என்பது $\mathcal{C}$-ல் அற்பமற்ற சீர்வளையமாகும். இது $\mathcal{C}$-ஒரு புலம் என்பதற்கு முரண்பாடாகும். எனவே M என்பது பெருமச் சீர்வளையமாகும். இங்கு f, f_M என்பன ஒரே வெற்று வெளிகளுடைய பெருக்குச் சார்பினமாதலால் துணைத்தேற்றம் 29.3-ன்படி $f = f_M$ ஆகும்.

அடுத்ததாக நமது நோக்கம் $\mathcal{M}$-என்பது கச்சிதமான ஹாஸ்ட்ராப் வெளி என நிறுவுவதாகும். தேற்றம் 29.1-ல் உள்ள தன்மைகள் (5) மற்றும் (6)-ன் படி ஒவ்வொரு பெருக்குச் சார்பின f_M-ன் அலகை 1 ஆகும். எனவே $\mathcal{M}$-என்பது S* என்ற மூடிய அலகு கோளத்தின் உட்கணமாகும். மேலும் S* என்பது நலிந்த* திணையம் (Weak* Topology) பொறுத்து கச்சிதமான ஹாஸ்ட்ராப் வெளி என்பது நமக்குத் தெரியும். இந்த நலிந்த* திணையமானது S*-ன் மீது $F_x(f) = f(x)$ என வரையறை செய்யப்படும் சார்புகளினால் உருவாக்கப்பட்டதாகும்.

$F_x(f_M) = f_M(x) = x(M) = \hat{x}\,(M)$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து F_x என்ற சார்பை $\mathcal{M}$-ல் கட்டுப்படுத்தும் போது $\hat{x}$ -க்குச் சமமாகும் என்பது தெளிவாகிறது. இவற்றிலிருந்து $\mathcal{M}$

என்பது S*-ன் உள்வெளியாக இருக்கும் போது $\mathcal{M}$-ன் உள்வெளி திணையமும் S*-ல் உள்ள திணையமும் சமமாகும். எனவே $\mathcal{M}$ என்பது S*-ன் உள்வெளி. இந்தக் கருத்துக்களைப் பயன்படுத்தி அடுத்து வரும் தேற்றத்தை நிறுவலாம்.

தேற்றம் 29.5

பெருமச் சீர்வளைய வெளி $\mathcal{M}$ என்பது ஒரு கச்சிதமான ஹாஸ்ட்ராப் வெளி ஆகும்.

நிறுவல்: மேலே உள்ள கருத்துகளின் அடிப்படையில் $\mathcal{M}$ என்பது மூடிய உள்வெளி என நிறுவினால் போதுமானதாகும்

$$X = \bigcap_{x,y \in A} \{f : f \in S^* \text{ மற்றும் } f(xy) = f(x)\, f(y)\}$$

என்பது S*-ல் உள் வெளி ஆகும். இவற்றிலிருந்து X என்பது $\mathcal{M}$-உடன் பூச்சிய சார்பினச் சார்பும் இணைந்தது என்பது தெளிவாகிறது.

$$X = \bigcap_{x,y \in A} \{f : f \in S^* \text{ மற்றும் } f(xy) - f(x)\, f(y) = 0\}$$

$$= \bigcap_{x,y \in A} \{f : f \in S^* \text{ மற்றும் } F_{xy}(f) - F_x(f)\, F_y(f) = 0\}$$

$$= \bigcap_{x,y \in A} \{f : f \in S^* \text{ மற்றும் } (F_{xy} - F_x F_y)(f) = 0\}$$

இவற்றிலிந்து X என்பது S*- ல் மூடியது என்பதை எளிதில் காணலாம். மேலும் F_1 என்பது X-ன் மீது தொடர்ச்சியானதாகவும் மற்றும் $\mathcal{M}$ மீது 1-க்குச் சமமானதாகும். பூச்சிய சார்பினச் சார்பில் பூச்சியமாகவும் இருக்கும். இவற்றிலிருந்து $\mathcal{M}$ என்பது X- ல் மூடிய உள் வெளி ஆகும். எனவே $\mathcal{M}$ என்பது S*- ல் மூடிய உள் வெளி ஆகும். அதனால் $\mathcal{M}$ என்பது கச்சிதமான ஹவுஸ்டிராஸ் வெளி ஆகும்.

தேற்றம் 29.2 மற்றும் 29.5 இணைந்து கொடுக்கும் முடிவு ஜெல்பபாண்ட் சார்பிடல் தேற்றம் எனப்படும்.

30. $r(x) = \lim \| x_n \|^{1/n}$ என்ற வாய்பாட்டின் பயன்பாடு (Application of Spectral Radius)

இந்தப் பகுதியில், ஏதாவது ஒரு பரிமாற்று பானக் அறமம் A மற்றும் A-விருந்து $\mathcal{C}(\mathcal{M})$-ன் உள் அறமம் $\hat{A}$ –க்கு வரையறை செய்யப்படும் ஜெல்பாண்ட் சார்பிடல் $x \to \hat{x}$ ஆகியவற்றைப் பற்றி நமது படிப்பைத் தொடருவோம்.

தேற்றம் 30.1

பரிமாற்றுக் பானக் அறமம் A-ன் மீது கீழ்க்கண்ட கட்டுப்பாடுகள் ஒன்றுக்கொன்று சமமானவையாகும்.

(1) ஒவ்வொரு x-க்கும் $\| x^2 \| = \| x \|^2$

(2) ஒவ்வொரு x-க்கும் $r(x) = \| x \|$

(3) ஒவ்வொரு x-க்கும் $\| \hat{x} \| = \| x \|$

நிறுவல்: (1) $\Rightarrow$ (2)

கட்டுப்பாடு (1)- லிருந்து

$\|x^4\| = \| (x^2)^2 \| = \| x^2 \|^2 = \| x \|^4$.

இவற்றிலிருந்து பொதுவாக ஒவ்வொரு நேர்மம முழு எண் k-க்கு $\|x^{2k}\| = \| x \|^{2k}$ என நிறுவலாம். நிறமாலை ஆர வாய்ப்பாட்டிலிருந்து

$r(x) = \lim \| x_n \|^{1/n} = \lim \| x_{2k} \|^{1/2k} = \lim \| x \| = \| x \|$.

அதாவது, ஒவ்வொரு x-க்கும் $r(x) = \| x \|$.

(2) $\Rightarrow$ (1)

$\| x^2 \| = r(x^2) = r(x)^2 = \| x \|^2$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து $\| x^2 \| = \| x \|^2$ எனக் கிடைக்கும்.

(2) $\Leftrightarrow$ (3)

தேற்றம் 29.2- லிருந்து $r(x) = \|\hat{x}\|$. இவற்றிலிருந்து (2) $\Leftrightarrow$ (3) நிறுவப்படுகிறது.

A- ல் உள்ள ஒவ்வொரு x-க்கும் அதற்குத் தகுந்தாற்போல் $y \in A$ என்ற உறுப்பு ஒவ்வொரு M-க்கும் $\hat{y}(M) = \overline{\hat{x}(M)}$ என்றவாறு இருக்குமானால் A என்பது **தன்இணைபு** (Self adjoint) **பரிமாற்று பானக் அறமம்** எனப்படும்.

தேற்றம் 30.2

A என்பது தன்இணைபு பரிமாற்று பானக் அறமம் எனில், $\hat{A}$ என்பது $\mathcal{C}(\mathcal{M})$-ல் அடர்கணம் (Dense set) ஆக இருக்கும்.

நிறுவல்: தேற்றம் 28.2-ல் பகுதி (1)-ன் படி $\hat{A}$ என்பது $\mathcal{C}(\mathcal{M})$-ல் உள் அறமம் ஆகும். இது $\mathcal{M}$-ல் உள்ள உறுப்புகளையும் மற்றும் முற்றொருமைச் சார்பை உள்ளடக்கியவற்றையும் பிரிக்கிறது. மேலும் $\hat{A}$ -ன் அடைப்பு (Closure) $\mathcal{C}(\mathcal{M})$-ல் ஒரு மூடிய உள் அறமம் என்பதை எளிதில் நிறுவலாம். இது முற்றொருமை உறுப்புகள் மற்றும் ஒவ்வொரு சார்புகளின் இணையிய சார்புகளை உள்ளடக்கிய உறுப்புகளைப் பிரிக்கும். எனவே மெய்ப்புனையெண் ஸ்டோன் வெய்ஸ்டிராஸ் தேற்றத்தின் (Stone-Weierstrass Theorem) படி $\hat{A}$ -ன் அடைப்பு $\mathcal{C}(\mathcal{M})$-க்குச் சமமாகும். எனவே $\hat{A}$ -என்பது $\mathcal{C}(\mathcal{M})$-ல் அடர்கணமாகும்.

மேலே உள்ள இரண்டு தேற்றங்களையும் இணைத்து கீழே உள்ள தேற்றம் பெறப்படுகிறது.

தேற்றம் 30.3

A என்பது தன்இணைபு மற்றும் ஒவ்வொரு x-க்கும் $\| x^2 \| = \| x \|^2$ எனில் A-லிருந்து $\mathcal{C}(\mathcal{M})$-க்கு வரையறை செய்யப்படும் $x \to \hat{x}$ என்ற ஜெல்பாண்ட் சார்பிடல் சமயாப்புள்ள சமஒப்புமைச் சார்பு ஆகும்.

நிறுவல்: தேற்றம் 30.1-ன் படி $\|\hat{x}\| = \| x \|$ எனவே $x \to \hat{x}$ என்ற சார்பு A- லிருந்து $\hat{A}$ – க்கு சமயாப்புள்ள சமஒப்புமைச் சார்பு ஆகும். மேலும் $\hat{A}$ என்பது $\mathcal{C}(\mathcal{M})$-ல் மூடிய உள்ள அறமம் ஆகும். தேற்றம் 30.2-ன் படி $\hat{A}$ என்பது $\mathcal{C}(\mathcal{M})$-ன் அடைப்பு ஆதலால், $\hat{A}$ என்பது $\mathcal{C}(\mathcal{M})$-க்கு சமமாகும். எனவே $x \to \hat{x}$ என்ற சார்பு A- லிருந்து $\mathcal{C}(\mathcal{M})$-க்கு சமயாப்புள்ள சமஒப்புமைச் சார்பு ஆகும்.

31. பானக் அறமங்களில் உட்சுழற்சி (Involution in Banach Algebra)

A-லிருந்து A-க்கு வரையப்படும் $x \to x^*$ என்ற சார்பு கீழ்க்கண்ட தன்மைகளைக் கொண்டிருக்கு மானால்

(1) $(x + y)^* = x^* + y^*$

(2) $(\alpha x)^* = \overline{\alpha} x^*$

(3) $(x y)^* = y^* x^*$

(4) $x^{**} = x$

அந்தச் சார்பு **உட்சுழற்சி** (Involution) எனப்படும்.

A என்ற பானக் அறமம் உட்சுழற்சியைப் பெற்றிருக்குமானால் அது **பானக்*அறமம்** (Banach* Algebra) எனப்படும்.

தன்மை (4) லிருந்து $x \to x^*$ என்ற உட்சுழற்சி ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடைய மேல் சார்பு ஆகும். மேலும் $0 + x^* = x^* = (0 + x)^* = 0^* + x^*$. இவற்றிலிருந்து $0 = 0^*$. இதே போல $1^* = 11^* = 1^{**} 1^* = (11^*)^* = (1^*)^* = 1^{**} = 1$.எனவே. $1^*=1$. இங்கு x^* என்பது x-ன் தன் இணைபு எனப்படும்.

A என்ற பானக் *- அறமத்திலிருந்து A′என்ற பானக்*- அறமத்திற்கு வரையறை செய்யப்படும் f என்ற சமஒப்புமைச் சார்பு $f(x^*) = f(x)^*$ என்ற கட்டுப்பாட்டை நிறைவுசெய்யுமானால் அது ***-சமஒப்புமைச் சார்பு** (*-Isomorphism) எனப்படும்.

A-ன் உள் அறமம் அதன் ஒவ்வொரு உறுப்புகளின் தன் இணையைப் பெற்றிருக்குமானால் அந்த உள் அறமம் தன்இணைபு உள் அறமம் எனப்படும். மேலும் $\| x^* \| = \| x \|$ என்ற தன்மைகளிலிருந்து உட்சுழற்சி தொடர்ச்சியானது என நிறுவலாம். அதற்காக

$$\| x_n^* - x^* \| = \| (x_n - x)^* \| = \| x_n - x \|$$

இவற்றிலிருந்து $x \to x$ எனும் போது $x_n^* \to x^*$ ஆகும். எனவே உட்சுழற்சி தொடர்ச்சியானது ஆகும். மேலும் உட்சுழற்சிக்கும் அலகைக்கும் இடையே ஒரு அழுத்தமான தொடர்பு $\| x^*x \| = \| x \|^2$ என்ற கட்டுப்பாட்டினால் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு பானக்* அறமம் இந்தக் கட்டுப்பாட்டினை நிறைவு செய்யுமானால் அது **B*-அறமம்** (B* -Algebra) எனப்படும். ஒவ்வொரு B* அறமத்திலும் $\| x^* \| = \| x \|$ என இருக்கும் என்பதை எளிதில் காணமுடிகிறது. அதற்காக,

$$\| x \|^2 = \| x^*x \| \leq \| x^* \| \| x \|$$

இது ஒவ்வொரு x-க்கும் $\| x \| \leq \| x^* \|$ என்பதைக் காட்டுகிறது. அதனால் $\| x^* \| \leq \| x^{**} \| = \| x \|$ மேலும், $\| x^* \| \leq \| x \|$. எனவே $\| x^* \| = \| x \|$ இந்தத் தொடர்பிலிருந்து $\| x^*x \| = \| x^* \| \| x \|$ என்பதும் உண்மையாகிறது.

பிரிவு 23-ல் விவரிக்கப்பட்டுள்ள பானக் அறமமங்கள் யாவும் உட்சுழற்சியைப் பொறுத்து பானக்* அறமம் ஆகும். இது போன்ற அறமங்களில் x-ன் தன்இணைபு x^* என்பதை ஏற்கனவே பார்த்தோம். அதே போல $x = x^*$ எனும் போது x-தன்இணைபுடையது மற்றும் $xx^* = x^*x$ எனும் போது இயல்பானது, $x^* = x$, $x^2 = x$ எனும் போது வீழல் எனவும் கூறலாம்.

தேற்றம் 31.1

B*-அறமத்தில் x என்பது ஒரு இயல் உறுப்பு (Normal Element) எனில் $\| x^2 \| = \| x \|^2$ ஆகும்.

நிறுவல்

$\| x^2 \| \leq \| x \|^2$ என்பது மிகவும் எளிமையானது இந்த சமனிலியின் அடுத்த திசையை கீழ்க்கண்ட கணக்கீட்டின் மூலம் நிறுவலாம். அதாவது,

$$\| x^* \|^2 \| x \|^2 = (\| x^* \| \| x \|)^2 = \| x^* x \|^2 = \|(x^*x)^* x^*x\|$$

$$= \| x^*x\, x^*x\| = \| x^* x^*xx\| = \| (x^*)^2 x^2 \| = \| (x^*)^2 \| \| x^2\| \leq \| x^* \|^2 \| x^2 \|$$

எனவே $\| x \|^2 \leq \| x^2 \|$. இவற்றிலிருந்து $\| x^2 \| = \| x \|^2$.

இந்தத் தேற்றத்தின் முடிவானது அறமத்திற்கும் ஹில்பர்ட் வெளியின் மீது வரையறை செய்யப்படும் செயலிகளின் அறமத்திற்கும் (தேற்றம் 25.5) மிகவும் நெருங்கியத் தொடர்பு இருப்பதை அழுத்தமாக கூறுகிறது.

32. ஜெல்பாண்ட் நியூமார்க் தேற்றம்

நாம் இப்போது தேற்றம் 30.3-ன் இறுதி வடிவம் கொடுக்கும் நிலையில் உள்ளோம்.

தேற்றம் 32.1

A என்பது பரிமாற்ற B*அறமம் எனில் A-லிருந்து B*அறமம் $\mathcal{C}(\mathcal{M})$-க்கு வரையறை செய்யப்படும் ஜெல்பாண்ட் சார்பிடல் $x \to \hat{x}$ ஒரு சமயாப்புள்ள * சம ஒப்புமைச் சார்ப (Isometric* Isomorphism) ஆகும்.

நிறுவல்: இங்கு A பரிமாற்று அறமம் அதில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் இயல் உறுப்பாகும். எனவே தேற்றம் 31.1-ன் படி ஒவ்வொரு x-க்கும் $\| x^2 \| = \| x \|^2$. தேற்றம் 30.3-ன் படி A-ல் உள்ள ஒவ்வொரு x-க்கும் $\mathcal{M}$-ல் உள்ள ஒவ்வொரு M-க்கும் $\hat{x}^*(M) = \overline{\hat{x}(M)}$ என நிறுவினால் போதுமானதாகும்.

இதற்கு, நமது முதல் படியாக x தன்இணைபுச் சார்பு எனும்போது, ஒவ்வொரு M-க்கும் $\hat{x}(M)$ஒரு மெய்யெண் என நிறுவவேண்டும். இப்போது $\hat{x}(M)=\alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$ என எடுத்துக்கொள்வோம். இங்கு x என்பது தன்இணைபு, எனவே $y = (x - \alpha I)\beta$ என்பதும் தன்இணைபு ஆகும். இவற்றிலிருந்து $\hat{y}(M) = i$ என்பது குறிப்பிடத்தக்கது. எனவே y - i1என்பது M-ல் இருக்கும். A-ல் உள்ள உட்சுழற்சிகளின் தன்மைகளிலிருந்து

$$M^* = \{m^* : m \in M\}$$

என்பது பெரும சீர்வளையம். இது $(y - i1)^* = y + i1$-ஐ கொண்டிருப்பதால் $\hat{y}(M^*) = -i$ ஆகும். k என்பது ஏதாவது நேர்ம எண் எனில்,

$$\widehat{(y - ik\, 1)}\ (M^*) = -i\,(1+k)$$

மற்றும் $\| \widehat{y - ik\, 1} \| (M = i(1+k)$.

இவற்றிலிருந்து

$1+k \le \| \widehat{y - ik\, 1} \| \le \|y - ik1\|$ இதே போல $(1+k) \le \|y + ik1\|$ எனவும் நிறுவலாம். இந்த இரண்டு சமனிலிகளையும் பெருக்கினால் $(1+k)^2 \le \| y - ik1\|\ \|y + ik1\|$

$$\begin{aligned} &= \| (y + ik1)^* \|\ \|y + ik1\| \\ &= \| (y - ik1)\,(y + ik1) \| \\ &= \| (y^2 + k^2 1) \| \\ &\le \| y^2 \| + \| k^2 \| \end{aligned}$$

அதாவது $(1+k)^2 \le \| y^2 \| + \| k^2 \|$

இங்கு k என்பது ஏதாவது ஒரு நேர்ம எண். எனவே இந்தச் சமனிலி இயலாத ஒன்றாகும். எனவே $\hat{x}(M)$ என்பது ஒரு மெய்யெண் ஆகும்.

இறுதியாக A-ல் x என்பது ஏதாவது ஒரு உறுப்பு எனில் ஒவ்வொரு M-க்கு $\hat{x}^*(M) = \overline{\hat{x}(M)}$ இருக்கும் என நிறுவவேண்டும். $y = (x + x^*) / 2$, $z = (x - x^*) / 2i$ தன்இணைபு என்பது மிகவும் வெளிப்படையானதாகும். எனவே $x = y + iz$ இப்போது

$$\begin{aligned}\hat{x}^*(M) &= \widehat{(y - iz)}(M) = \hat{y}(M) - i\hat{z}(M)\\ &= \overline{\hat{y}(M)} - i\overline{\hat{z}(M)}\\ &= \overline{\hat{y}(M) + i\hat{z}(M)}\\ &= \overline{\hat{x}(M)}\end{aligned}$$

இத்துடன் இந்தத் தேற்றம் நிறைவுறுகிறது.

ஙஜஙஜஙஜஙஜ

REFERENCES

1. Choudhary and Sudarsan Nanda, Functional Analysis with Applications, Wiley Eastern Ltd., 1989.

2. Conway, J.B., A Course in Functional Analysis, Springer-Verlag, New York, 1990.

3. Goffman, C. and Pedrick, First Course in Functional Analysis, Prentice Hall of India, New Delhi, 1987.

4. Jain, P.K, Ahuja, O.P and Khalil Ahmad, Functional Analysis, New Age International (P) Ltd., & Wiley Eastern Ltd., New Delhi, 1997.

5. Lahiri, B.K, Elements of Functional Analysis, The World Press Pvt., Ltd., Calcultta, 1994.

6. Limaye, B.V., Functional Analysis Wiley Eastern Ltd. New Delhi.

7. Royden, H.L, Real Analysis, Macmillan Publishing Co. Inc., New York, 4th Edition, 1993.

8. Siddiqui, A.H., Functional Analysis with Applications, Tata McGraw-Hill Publishing Company Ltd., New Delhi.

9. Simmons, G.F., Introduction to Topology and Modern Analysis, McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.

10. Walter Rudin, Functional Analysis, Tata McGraw-Hill Publishing Company Ltd., New York, 1973.

குறியீடுகள் (Symbols)

$A \subseteq B$	A என்பது B-ன் உட்கணம்
$A \subset B$	A என்பது B-ன் முறையான உட்கணம்
$A \cup B$	இரண்டு கணங்களின் சேர்ப்புக் கணம்
$A \cap B$	இரண்டு கணங்களின் வெட்டுக் கணம்
A'	A-ன் நிரப்பிக் கணம்
$A-B$	இரண்டு கணங்களின் வேறுபாடு
$a \equiv b \pmod{m}$	b-என்பது a- ஐ m-ஆல் வகுக்கும் போது மீதம்
$\overline{A}$	A-ன் அடைப்பு
$A_1 \leq A_2$	வரிசைத்தொடர்பு
An	n-படியுடைய மொத்த அணி அறமம்.
$\hat{A}$	பரிமாற்றுக் பானக் அறமம்
$\mathcal{B}(N,N')$	N-லிருந்து N′-க்கு வரையப்படும் அனைத்து தொடர்ச்சியான நேரியல் உருமாற்றங்களின் கணம்
$\mathcal{B}(N)$	N-ன் மீது செயலிகளின் அறமம்
C	மெய்ப்புனையெண்களின் கணம்
C^n	n பரிமாண யூக்லீடீன் வெளி
$\mathcal{C}(X,R)$	X-ன் மீது வரையறை செய்யப்படும் அனைத்து தொடர்ச்சியான எல்லைக்குட்பட்ட மெய்சார்புகளின் கணம்
$\mathcal{C}(X,C)$	X-ன் மீது வரையறை செய்யப்படும் அனைத்து தொடர்ச்சியான எல்லைக்குட்பட்ட மெய்புனைச் சார்புகளின் கணம்
$d(x,y)$	x-லிருந்து y-க்கு இடையே உள்ள் தொடர்பு
δ_{ij}	கர்னெக்கர் டெல்டா
$\det([\alpha_{ij}])$	$[\alpha_{ij}]$ என்ற அணியின் அணிக்கோவை
ϕ	வெற்றுக் கணம்
$f : X \to Y$	அரங்கம் X- ஆகவும் வீச்சு Y- ஆகவும் கொண்ட சார்பு f
$f^{-1} : Y \to X$	எதிர்மாறுச் சார்பு
F_x	இணைய வெளியில் உருவாக்கப்பட்ட சார்பு
f_M	பெருக்குச் சார்பின
inf A	A-ன் மிகப்பெரிய கீழ் எல்லை
$\mathcal{M}$	பெருமச் சீர்வளையங்களின் வெளி
M_x	x-என்ற உறுப்புக்கு இணைந்த பெருமச் சீர்வளையம்
$M+N$	இரண்டு கணங்கள் அல்லது வெளிகளின் கூடுதல்
$M \oplus N$	இரண்டு உள்வெளிகளின் நேர் கூட்டல்
N^*	அலகை நேரியல் வெளி N-ன் இணையிய வெளி
N^{**}	இரண்டாவது இணையிய வெளி

N/M	M-என்ற மூடிய வெளியை பொறுத்து ஈவு வெளி அல்லது வகுத்தல் வெளி
R	மெய்யெண்களின்கணம்
R^n	பரிமாண யூக்லீடீன் வெளி
r(x)	நிறமாலை ஆரம்
ρ(x)	x-ன் கூறாக்கி கணம்
S	பானக் அறமத்திலுள்ள அருநிலை உறுப்புகளின் கணம்
S*	இணையிய வெளியில் மூடிய அலகுக் கோளம்
$S^{\perp}$	செங்குத்து நிரப்பிக் கணம்
[S]	S-ஆல் உருவாக்கப்பட்ட வெளி
$S_r(x)$	x-ஐ மையமாகவும் r ஆரமாகவும் கொண்ட திறந்த கோளம்
Sup A	A-ன் மிகக் குறைந்த மேல் எல்லை
σ(T)	செயலி T-ன் நிறமாலை
σ(x)	x-ன் நிறமாலை
T*	செயலி T-ன் இணைச் செயலி
‖ T ‖	செயலியின் அலகை
[T], $[T]_B$	செயலி T-ன் அணி
x→y	சார்பிடல் குறியீடு
$x_n \to x$	x_n என்ற தொடர்வரிசை x-ல் குவிகிறது
$X_1 \times X_2$	இரண்டு கணங்களின் பெருக்கல்
[x]	x-க்கு தொடர்புடைய சமமானக் கணம்
x(M)	பெரும சீர் வளையங்களின் சார்புகள்
$\hat{x}$	பெரும சீர்வளையங்களின் சார்பு
x(λ)	x-ன் கூறாக்கி கணம்
x⊥y	x என்பது y-க்கு செங்குத்தாகும்
Z	ஒரு பானக் அறமத்தில் சூழியனின் திணையிய வகுப்பான்களின் கணம்

கலைச்சொற்கள்

Abelian Group,10 - அபிலியன்குலம்
Adjoint operator,93 - இணைச் செயலி
Algebra ideal,17 - அறமச் சீர்வளையம்
Algebra System,82 - அறம அமைப்பு
Algebra,16 - அறமம், இயற்கணிதம்
Algebraic Operation,4 - அறமச்செயல்கள்
Algebraic Operator,82 - அறமச் செயலி
Algebraic System, 3 - இயற்கணித அமைப்பு
Analytic Function,101 - வகைமுறைச் சார்பு
Analytic,93 - வகைமுறை
Anti symmetry,8 - எதிர்சமச்சீர்மை
Assumption,52 - தற்கோள்
B* algebra,115 - B * அறமம்
Banach * algebra,115 - பானக* அறமம்
Banach Algebra,92 - பானக் அறமம்
Banach Space, 18 - பானக் வெளிகள்
Basis,15 - அடிக்கணம்
Bessel's Inequality,54 - பெசல்ஸ் சமனிலி
Binary Operation,10 - இருமச் செயலி
Binary relation,7 - இருமத் தொடர்பு
Boolean Algebra,4 - பூலியன் அறமம்
Capital Letters,3 - பெரிய எழுத்துகள்
Cardinal number,59 - செவ்வெண்
Chain,57 - சங்கிலி
Characteristic equation,86 - சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு
Class,57 - வகுப்பு
Closed Convex Subset,45 - மூடிய குவி உட்கணம்
Closure,105,113 - அடைப்பு
Co set,12 - இணைக்கணம்
Commutative algebra,17 - பரிமாற்று அறமம்
Commutative banach algebra,105 - பரிமாற்று பானக் அறமம்
Commutative group10 - பரிமாற்று குலம்
Commutative Ring,11 - பரிமாற்று வளையம்
Compact Subspace,98 - கச்சிதமான உள்வெளி
Comparable,9 - ஒப்பிடக்கூடியவை
Complement Set,4 - நிரப்பிக்கணம்

Complete Lattice,10 - முழுப்பின்னல்
Complete Orthonormal Set,57 - முழு செங்குத்து வெளி
Complete Space,94 - முழுவெளி
Complex algebra,17,82 - மெய்ப்புனையெண் அறமம்
Complex Analysis,98 - மெய்புணையெண் பகுப்பாய்வு
Complex Banach Space,42,92 - மெய்புனை பானக் வெளி
Complex Number,28 - மெய்புனையெண்
Composition,6 - இயைபு
Congruent modulo,11 - மடங்கில் ஒருங்கிசை
Conjugate of an Operator,37 - செயலியின் இணைச் செயலி
Conjugate Space,27 - இணையிய வெளி
Constant Function,5 - மாறிலிச் சார்பு
Convex Set,45 - குவி கணம்
Countable,8 - எண்ணத்தக்க கணம்
Countably Infinite,8 - எண்ணத்தக்க முடிவுறா
Det,85 - அணிக்கோவை
Determinant,84 - அணிக்கோவை
Diagonal Matrix,90 - முலை விட்ட அணி
Dimension,16 - பரிமாணம்
Direct sum,14 - நேர்க் கூட்டல்
Disc Algebra,93 - வட்டத்தகடு அறமம்
Disjoint space,14 - இணைப்பில்லா வெளி
Distributive Law,4 - பங்கீட்டு விதி
Division Algebra,98 - வகுத்தல் அறமம்
Domain,5,27 - அரங்கம்
Eigen space,78 - ஜகன்வெளி
Eigen Value,78 - ஜகன் மதிப்பு
Eigen Vector,78 - ஜகன் திசையன்
Entity,3 - உருப்படி
Equivalence class set,12 - சமான வகுப்புக் கணம்
Equivalence relation,8 - சமான தொடர்பு
Equivalence Set,8 - சமான கணம்
Euclidean Space,7 - யூக்ளிடீன் வெளி
Even Numbers,10 - இரட்டை எண்
Extension,5 - நீட்டிப்பு
Field,11 - புலம்
Finite dimensional space,17 - முடிவுறு பரிமாண வெளி

Finite Set,3 - முடிவுறுகணம்
Functional Algebra,92 - சார்பின அறமம்
Functional,27 - சார்பின
Gelfand mapping,105 - ஜெல்பாண்ட் சார்பிடல்
Graph,36 - வரைபு
Greatest lower bound,9 - மீப்பெரு கீழ் எல்லை
Group Algebra,93 - குழு அறமம்
Group,76 - குலம்
Hilbert Space,42 - ஹில்பார்ட் வெளி
Holder's Inequality,22 - ஹோல்டர் சமனிலி
Homeomorphism,35,94 - வடிவொப்புமை
Homomorphic function,108 - செயலொப்புமைச் சார்பு
Homomorphism,12 - செயலொப்புமைச்சார்பு
Ideal,11,102 - சீர்வளையம்
Idempotent,35 ,71- தன் அடுக்கு
Identity,36 - முற்றொருமை
Image,5 - நிழல்
Improper linear subspace,13 - முறையிலா நேரியல் உள்வெளி
Infinite Set,3 - முடிவுறா கணம்
Inner Product,43 - உள் பெருக்கல்
Interior Point,33 - அகப்புள்ளி
Intersection of two sets,4 - வெட்டுக்கணம்
Into Function,5 - உள் சார்பு
Invariant,73 - மாறாதது
Inverse Function,6 - நேர்மாற்றுச்சார்பு, எதர்மாறுச் சார்பு
Involution,112 - உள்சுழற்சி
Isometric Isomorphism,26,31 - சமயாப்புள்ள சம ஒப்புமை
Isometric* isomorphism,116 - சமயாப்புள்ள * சமஒப்புமைச் சார்பு
Isomorphism,12,82 - சமஒப்புமைச்சார்பு
Joint Continuity,105 - சேர்ப்பு தொடர்ச்சியான
Lattice,8,10 - பின்னல்
Least Upper Bound,9 - மீச்சிறு மேல் எல்லை
Left Ideal,102 - இடது சீர்வளையம்
Left Regular,102 - இடது ஒழுங்கானது
Linear combination,79 - நேரியல் சேர்க்கை
Linear Functional,61 - நேரியல் சார்பின
Linear operations,13 - நேரியல் செயல்கள்

Linear Space,12,18 - நேரியல் வெளி, திசைய வெளி
Linear subspace,13 - நேரியல் உள்வெளி
Linear transformation,5,18 - நேரியல் உருமாற்றம்
Linearly dependent,14 - நேரியல் சார்புடையது
Linearly Independent Set,59,90 - நேரியல் சார்பற்ற கணம்
Linearly Ordered Set,9 - வரிசைப்படுத்தப்பட்ட கணம்
Logic,3 - தர்க்கவியல்
Lower Bound,9 - கீழ் எல்லை
Mapping,5,12 - சார்பிடல்
Maximal ideal space,108 - பெருமச் சீர்வளையம் வெளி
Maximal ideal,12 - பெருமச் சீர்வளையம்
Maximal Left ideal,103 - பெரும இடது சீர்வளையம்
Maximal linearly independent,14 - பெரும நேரியல் சார்பற்றது
Maximal Set,57 - பெரும கணம்
Maximal,29 - பெரும
Measurable Space,43 - அளவையியல் வெளி
Metric Space,18 - அளவை வெளி
Multiplicative functional,110 - பெருக்குச் சார்பின்
Natural Homomorphism,106 - இயல்பான செயலொப்புமை
Natural Imbedding,30 - இயல் பதித்தல்
Non decreasing homomorphism,109 - இறங்குவரிசையற்ற செயலொப்புமை
Non Singular Matrix,83 - அருநிலையில்லா அணி
Non singular,16,66 - அருநிலையற்ற, ஒருமையல்லாத
Norm,19 - அலகை
Normal element,115 - இயல் உருப்பு
Normal Operator,67 - இயல் செயலி
Normed Linear Space,18 - அலகை நேரியல் வெளி
Null Space,30,110 - வெற்று வெளி
Numerically Equivalent,8 - எண்ணளவில் சமமானவை
Objects,3 - உருவங்கள்
One to One,6 - ஒன்றுக்கொன்றான
Onto Function,5 - மேல் சார்பு
Operator Algebra,93 - செயலி அறமம்
Operator,5,26,93 - செயலி
Order relation,8,65 - வரிசைத்தொடர்பு
Order structure,66- வரிசைக்கட்டமைப்பு
Orthogonal Complements,48 - செங்குத்து நிரப்பிகள்

Orthogonal space,51 - செங்குத்து வெளி
Orthonormal Basis,90 - செங்குத்து அடிக்கணம்
Orthonormal Set,52 - அலகு செங்குத்துக் கணம்
Partial Order Relation,8 - பகுதி வரிசைத் தொடர்பு
Partial Sum,94 - பகுதிக்கூட்டல்
Partially Ordered Set, 8,57 - பகுதி வரிசைப்படுத்தப்பட்ட கணம்
Partition sets,7 - பிரிவினைக் கணங்கள்
Perpendicular Projection,72 - செங்குத்து வீழல்
Philosophy,3 - தத்துவம்
Polynomial,85 - பல்லுறுப்பக்கோவை
Positive Operator, - நேர்மச் செயலி
Projection,16,35,71 - வீழல்
Proper sub set,4,11 - முறையான உட்கணம்
Pure Mathematics,3 - தூய கணிதவியல்
Pythagorean Theorem,49 - பிதாகொரியன் தேற்றம்
Quotient ring,12 - வகுத்தல் வளையம். ஈவு வளையம்
Radical of Algebra,102 - அறமத்தின் படி மூலம்
Range,5 - வீச்சு
Real algebra,17 - மெய்அறமம்
Real function,5 - மெய்ச்சார்பு
Reduced,73 - சுருக்கப்பட்டவை
Reduces,73 - சுருக்குகிறது
Reflexive Space,32 - தற்சுட்டு வெளி
Reflexivity,8 - தற்சுட்டு
Regular,11 - சீரான உறுப்பு
Relation,8 - தொடர்பு
Resolvent Set,97 - கூறாக்கி கணம்
Restriction,5 - கட்டுப்பாடு
Ring with Unity,11 - முற்றொருமை வளையம்
Ring,105 - வளையம்
Scalar Value,27 - அளவன் மதிப்பு
Scalar,13 - அளவன்
Self Adjoint Operator,64 - தன் இணைபுச் செயலி
Self Adjoint,93 - தன் இணை
Semi Simple algebra,102,105 - அரை எளிய அறமம்
Sequence,19 - தொடர்வரிசை
Set Inclusion,6 - கண உள்டக்கல்

Set Mapping,6	-	கண சார்பிடல்
Set,3	-	கணம்
Similar Matrices,83,94	-	வடிவொத்த அணிகள்
Singular Matrix,84	-	அருநிலை அணி
Singular,16	-	அருநிலை
Spanned,14	-	உருவாக்கப்பட்ட
Spectral Radius,98	-	நிறமாலை ஆரம்
Spectral Resolution,79	-	நிறமாலை கூறாக்கம்
Spectral Theorem,89	-	நிறமாலைத் தேற்றம்
Spectrum,87,96	-	நிறமாலை
Square Matrix,84	-	சதுர அணி
Stone weierstrass theorem,113	-	ஸ்டோன் வேய்ஸ்டிராஸ் தேற்றம்
Sub algebra,17	-	உள்அறமம்
Sub lattice,10	-	உள்பின்னல்
Sub ring,11	-	உள்வளையம்
Sub set ,4	-	உட்கணம்
Topological Divisors of Zero,95	-	சுழியின் திணைய வகுப்பான்கள்
Topological Space,21,93	-	திணைய வெளி
Total Matrix Algebra,82	-	மொத்த அணி அறமம்
Transitive,8	-	கடப்பு
Trivial ideal,11	-	அற்ப சீர்வளையம்
Two sided Ideal,102	-	இருபக்க சீர்வளையம்
Uncountable,8	-	எண்ணத்தக்கவல்ல கணம்
Union of Two Sets,4	-	சேர்ப்புக்கணம்
Union,29	-	சேர்ப்பு
Unit Disc,93	-	அலகு தகடு
Unitary Operator,76	-	அலகுநிலைச் செயலி
Unitary space,7	-	அலகு நிலை வெளி
Unitary,67	-	அலகு நிலை
Universal Set,4	-	முழுநிறை கணம்
Upper Bound,9	-	மேல் எல்லை
Variable,85	-	மாறி
Vector,18	-	திசையன்
Weak topology,108	-	நலிந்த திணையியல்
Weak* topology,111	-	நலிந்த * திணையியல்

LIBRARY ★ MADURAI KAMARAJ UNIVERSITY ★